UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1000 — Matematikk i praksis I.
Eksamensdag:	Fredag 5. juni 2009.
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Alle skriftlige hjelpemidler og godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Betrakt funksjonen $f(x) = e^{-x^2+2x}$ definert på intervallet $[-2, 2]$.

a) Finn maksimums- og minimumspunktene til f.

b) For hvilke x vil grafen til f krumme oppover og for hvilke x krummer den nedover? Finn eventuelle vendepunkter på grafen til f.

c) Finn Taylor-polynomet av grad 2 til f med hensyn på punktet $x = 0$.

d) På intervallet $[1, 2]$ har f en omvendt funksjon, f^{-1}. Bestem definisjonsområdet til f^{-1} og finn et uttrykk for denne funksjonen.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Ved forbrenning av fossile brennstoffer produseres gassen karbondioksyd (CO_2). Noe av denne gassen vil kunne tas opp av grønne planter ved fotosyntese. I et tenkt landområde med norske klimaforhold vil både utslipp og forbruk av CO_2 variere med årstidene. Utslippene er størst om vinteren og minst om sommeren. Plantenes fotosyntese, derimot, er størst om sommeren og svært liten om vinteren.

La $f(t)$ betegne produksjonen og $g(t)$ forbruket av CO_2 per døgn, målt i kg/km^2, ved tidspunktet t, der t er antall måneder etter 1. januar. Vi antar at både f og g varierer som harmoniske svingninger med periode $T = 12$. Vi antar videre at $f(t)$ har maksimalverdi 1200 og minimalverdi 600, mens $g(t)$ har maksimalverdi 1000 og minimalverdi 0. Funksjonen f antar sin største verdi 1. januar ($t = 0$), mens g er størst 1. juli ($t = 6$).

a) Finn uttrykk for $f(t)$ og $g(t)$ basert på opplysningene over.

b) I en periode i sommerhalvåret vil plantenes opptak av CO_2 være høyere enn utslippene fra forbrenning. Finn tidsintervallet hvor forbruket g er høyere enn produksjonen f. (Hint: Omform uttrykket for $g(t)$ ved hjelp av formelen for cosinus til en differens.)

Oppgave 3.

Et kar fylles med vann med tilstrømningshastighet $V(t)$ liter per sekund. Vi antar at for $t > 0$ er

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}.$$

Hvor mange liter har strømmet inn i karet i perioden $1 \leq t \leq 4$?

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 4.

Etter flatehogst av skog vil hogstflaten den første tiden være dominert av gress og ettårige planter. Etterhvert vil imidlertid hogstflaten gro til med flerårige planter. Vi skal undersøke hvordan antallet av en spesiell art flerårig plante kan øke på hogstflaten. Planten bruker ett år på å bli ferdig utvokst. Vi lar x_n være antall unge planter og y_n antall utvokste planter n sesonger etter flatehogsten. Vi antar at plantene frør seg slik at i gjennomsnitt vil hver ung plante gi én ny plante neste sesong, mens hver utvokst plante gir fire nye. Vi skriver derfor, for $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 4\,y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n\,. \end{aligned}$$

a) Finn overgangsmatrisen M slik at for $n \geq 0$ er

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

b) Finn den inverse matrisen M^{-1} til M. Hva var tilstandsvektoren etter 3 sesonger dersom tilstanden etter 4 sesonger var $x_4 = 41$ og $y_4 = 20$?

c) Finn egenverdiene til M, og vis at $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ er egenvektorer.

d) Anta at det opprinnelig bare var én ung plante på hogstflaten og ingen utvokste. Hva vil tilstandsvektoren være etter 8 sesonger?
(Hint: Uttrykk vektoren $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ som en sum av egenvektorer til M.)

SLUTT