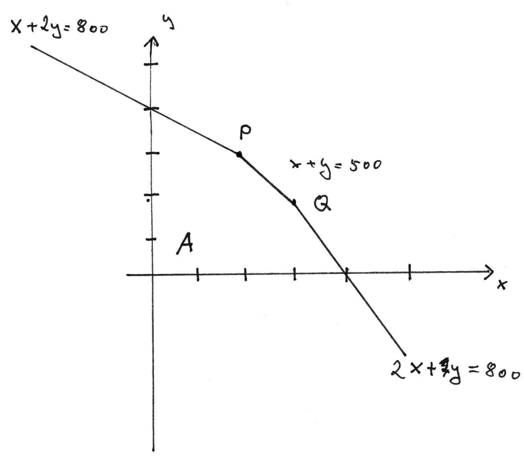
Løsningsforslag — Eksamen i MAT1000, juni 2005.

Oppgave 1



Området A er som på figuren. Punktene P og Q finner vi ved å løse ligningsettene

$$\begin{aligned} x + 2y &= 800 \\ x + y &= 500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 500 \\ 2x + y &= 800. \end{aligned}$$

Vi finner $P = (200, 300)$ og $Q = (300, 200)$. Verdien til $5x + 7y$ i de to punktene er 3100 og 2900 respektive, og siden vi vet at maksimum antas i ett av dem, er max-verdien 3100.

Oppgave 2

Antall svarte villkatter varierer etter formelen

$$S(t) = 45 + 20\sin(\frac{2\pi}{5}t),$$

og siden sinus har maksverdi 1, er det maksimale antall svarte katter lik $45 + 20 = 65$. Funksjonen $\sin x$ har sitt maksimum i en periode når $x = \frac{\pi}{2}$, og det gir $\frac{2\pi}{5}t = \frac{\pi}{2}$. Løser vi ut t, får vi $t = \frac{5}{4}$. Antall svarte katter er altså maksimalt etter $\frac{5}{4}$ år, eller altså ett år og tre måneder.

b) Det totale antall katter er gitt ved

$$H(t) + S(t) = 100 + 15\cos(\frac{2\pi}{5}t) + 20\sin(\frac{2\pi}{5}t) = 100 + C\cos(\frac{2\pi}{5}(t - t_0))$$

der C bestemmes ved $A = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$, og der t_0 er vinkelen i første kvadrant — siden koeffisientene foran båse sinus og cosinus er positive — som tilfredstilller $\tan \frac{2\pi}{5}t_0 = \frac{20}{15}$. Da blir $\frac{2\pi}{5}t_0 = 0.93$, og alstå $t_0 = \frac{5}{2\pi} \cdot 0.93 = 0.74$.

Vi får maksimum når $t = t_0$, altså etter 0.74 år, og maksimumsverdien er $100 + C = 125$.

Oppgave 3

a) Vi substituerer $u = 3x^2$. Det gir $du = 6xdx$, og alstå $xdx = \frac{1}{6}du$. Innsetting i det ubestemte integralet gir:

$$\int xe^{3x^2}dx = \frac{1}{6}\int e^u du = \frac{1}{6}e^u + C = \frac{1}{6}e^{3x^2} + C.$$

Det bestemte integralet blir

$$\int_0^1 xe^{3x^2}dx = \left[\frac{1}{6}e^{3x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(e^3 - 1\right).$$

b) Vi beregner først det ubestemte integralet ved delvis integrasjon og bruker $u = x$ og $v' = e^{2x}$. Da bli $u' = 1$ og $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Vi får

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}.$$

Det bestemte integraler blir

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(e^2 - 1).$$

Oppgave 4

a) Ligningstystemet

$$\begin{aligned} (1-t)x + 2y &= 5 \\ 3x + (2-t)y &= -5 \end{aligned}$$

har nøyaktig en løsning presis når determinanten til koeffisientmatrisen er forskjellig fra null. Vi regner ut determinanten:

$$\begin{vmatrix} (1-t) & 2 \\ 3 & (2-t) \end{vmatrix} = t^2 - 3t - 4,$$

og for å finne for hvilke t den er lik null, løser vi ligningen $t^2 - 3t - 4 = 0$. Det gir $t = -1$ og $t = 4$.
Ligningssystem har derfor nøyaktig en løsning når $t \neq 4$ og $t \neq -1$.

Oppgave 5

a) Vi finner nullpunktene til $f(x)$ av ligningen:

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} = 0.$$

Multiplikasjon med $2(x^2+1)$ på begge sider og bruk av første kvadratsetning gir ligningen

$$0 = 2x + x^2 + 1 = (x+1)^2,$$

som har en løsning, nemlig $x = -1$. Funksjonen har ingen vertikal assymptoter, siden den er definert for alle verdier av x. Når x går mot $\pm\infty$, går $f(x)$ mot $\frac{1}{2}$ siden

$$\lim \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1+1/x^2} = 0.$$

Linjen $y = \frac{1}{2}$ er derfor en horisontal assymptote.
b) Vi deriverer $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - 2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}.$$

Den deriverte har altså to nullpunkter, $x = 1$ og $x = -1$. En drøfting av fortegnet til $f'(x)$ gir at $f'(x) < 0$ når $x < -1$ eller $x > 1$ og at $f'(x) > 0$ når $-1 < x < 1$. Det betyr at $f(x)$ avtar når $x < -1$ eller $x > 1$ og at $f(x)$ vokser når $-1 < x < 1$.
c) Vi deriverer en gang til og bruker regelen for en brøk, setter mest mulig utenfor parentes og forkorter:

$$f''(x) = -\frac{(x^2+1)^2\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= -\frac{2x(x^2+1)\left((x^2+1) - 2(x^2-1)\right)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Den annenderiverte til $f(x)$ har altså nullpunktene $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ og $x = -\sqrt{3}$. Vi drøfter fortegnet til $f''(x)$ og finner at $f''(x) < 0$ når $x < -\sqrt{3}$ eller $0 < x < \sqrt{3}$ og at $f''(x) > 0$ når $-\sqrt{3} < x < 0$ eller $x > \sqrt{3}$. Den annenderiverte skifter altså fortegn i alle sine nullpunkter, og de er alle tre vendepunkter. Grafen til $f(x)$ krummer opp når $f''(x) > 0$, det vil si når $-\sqrt{3} < x < 0$ eller $x > \sqrt{3}$, og den krummer ned når $f''(x) < 0$. Det skjer når $x < -\sqrt{3}$ eller $0 < x < \sqrt{3}$.

d) Vi setter $u = x^2 - 1$. Da blir $du = 2dx$ og derfor $dx = \frac{1}{2}du$. Dette gir

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

I intervallet $[-1, 1]$ er $f(x) \geq 0$ — det fant vi punkt a) — slik at arealet mellom grafen og x-aksen er gitt som integralet

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = 1.$$