MAT1000 VÅREN 2006
OBLIGATORISK OPPGAVESETT 2

Innleveringsfrist: Fredag 28. april kl. 14.30

Oppgave 1

Betrakt funksjonen $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

a) Finn den største definisjonsmengden f kan ha. Avgjør hvor f er voksende og avtakende, og finn eventuelle maksimums- og minimumspunkter.

b) Vis at grafen til f alltid krummer nedover og finn eventuelle asymptoter.

c) Finn Taylor-polynomet $F_2(x)$ av grad 2 til f i $x = 0$. Skisser grafene til $f(x)$ og $F_2(x)$ i samme koordinatsystem.

Oppgave 2

En forsker har undersøkt seks apekranier. Hun har målt arealet A (i cm^2) av den store kranieåpningen og volumet V (i cm^3) av hjernen. Resultatene er som følger:

A	0.4	0.56	0.79	1.17	1.58	3.02
V	15.1	24.5	32.3	50.1	95.5	177.8

Som grunnlag for denne oppgaven skal du bruke de transformerte dataene som er gitt i neste tabell:

$x = 5 \ln A$	-4.6	-2.9	-1.2	0.9	2.4	5.5
$y = 2 \ln V$	5.4	6.4	7.0	7.8	9.2	10.0

a) Plott hvert av de seks punktene i (x, y)-planet. Tilpass en rett linje på øyemål til disse punktene, og finn tall a og b slik at linja får likningen $y = ax + b$.

b) Bruk likningen du fant i punkt a) til å angi en empirisk formel for V som funksjon av A. Gi svaret på formen $V = cA^r$, der c og r er reelle tall.

Oppgave 3

Befolkningstettheten $B(x)$ rundt et større bysentrum antas å følge modellen

$$B(x) = 1000(e^{-\frac{x}{10}} - e^{-\frac{3x}{10}}) \text{ (personer per km}^2\text{)}$$

der x betegner avstanden (i km) fra sentrum.

a) Hvor stor er befolkningstettheten i sentrum ifølge denne modellen? I hvilken avstand fra sentrum er tettheten størst?

b) Byen har hatt et kollektivreisetilbud som til nå har dekket alle innbyggerne i inntil 10 km avstand fra sentrum. Det nyvalgte bystyret har vedtatt å utvide tilbudet til å gjelde alle som bor i mindre avstand enn 20 km fra sentrum. Antall personer som blir berørt av dette vedtaket kan da uttrykkes ved

$$\int_{10}^{20} 2\pi x\, B(x)dx,$$

der $B(x)$ er befolkningstettheten gitt ovenfor. Bruk delvis integrasjon til å regne ut dette integralet.

Oppgave 4

Et offentlig kontor mottok og behandlet i 2005 søknader av en spesiell type. Behovet for å sende inn slike søknader var delvis sesongbetont. Kontoret mottok derfor søknader med en mottaksrate (målt i antall søknader per måned) som varierte med tiden. En modell for mottaksraten er

$$m(t) = 400 - 100\cos(\tfrac{\pi}{6}t) + 173\sin(\tfrac{\pi}{6}t),$$

der t måles i antall måneder fra tidspunktet 01.01.2005.

a) Skriv $m(t)$ på formen $C_0 + C\cos(\frac{\pi}{6}(t - t_0))$. Når var mottaksraten størst, og hvor stor var den da?

Kontoret hadde til enhver tid kapasitet til å behandle 500 søknader per måned. I begynnelsen av 2005 var denne kapasiteten høyere enn mottaksraten, slik at søknadene kunne behandles med en gang de ble mottatt. Mellom to tidspunkter t_1 og t_2 (der $t_1 < t_2$) var mottaksraten større enn behandlingskapasiteten, slik at ubehandlede søknader hopet seg opp.

b) Finn tidspunktene t_1 og t_2.

c) Hvor mange ubehandlede søknader hadde hopet seg opp på kontoret ved tidspunktet t_2?

SLUTT