# Fasit til Obligatorisk oppgavesett 1
# Våren 2007

## Oppgave 1

a): Vi har $f'(x) = -2(x-1)e^{-x^2+2x} = -2(x-1)f(x)$. Siden $f(x) > 0$ for alle $x$, ser vi at $f'(1) = 0$ og at $f'(x) > 0$ for $x < 1$ og $f'(x) < 0$ for $x > 1$. Så $f$ vokser når $x < 1$ og avtar når $x > 1$. Funksjonen har derfor et maksimumspunkt for $x = 1$, med maksimumsverdi $f(1) = e$.

Verdiene til $f$ i endepunktene for definisjonsintervallet er $f(-2) = e^{-8}$ og $f(2) = e^0 = 1$. Derfor har $f$ minimumspunkt for $x = -2$, med minimumsverdi $f(-2) = e^{-8}$.

b): $f''(x) = -2f(x) + (-2(x-1))^2 f(x) = (-2 + 4x^2 - 8x + 4)f(x) = (4x^2 - 8x + 2)f(x)$. Vi finner at

$$4x^2 - 8x + 2 = 4(x - 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})(x - 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}),$$

så $f''(x) = 0$ for $x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Videre er $f''(x) > 0$ for $-2 \leq x < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ og $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} < x \leq 2$, og $f''(x) < 0$ for $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Grafen til $f$ krummer oppover for $x \in [-2, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}] \cup [1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 2]$ og nedover for $x \in [1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}]$. Vendepunktene på grafen er $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, f(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})) = (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{e})$ og $(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, f(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})) = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{e})$.

c): Taylor-polynomet av grad 2 med hensyn på punktet $x = 0$ er $F_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 + 2x + x^2$.

d): Vi har sett at $f$ er strengt avtakende på $[1, 2]$. Vi har $f(1) = e$ og $f(2) = 1$, så definisjonsområdet til $f^{-1}$ er $[1, e]$.

For å finne et uttrykk for den omvendte funksjonen løser vi $y = e^{-x^2+2x}$ med hensyn på $x$:

$$\ln y = -x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1,$$

som gir $(x-1)^2 = 1 - \ln y$, altså $x - 1 = \pm\sqrt{1 - \ln y}$. Fordi $x = 2$ svarer til $y = f(2) = 1$, ser vi at den riktige løsningen er

$$x = f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{1 - \ln y}.$$

## Oppgave 2

a): Vi finner følgende tabell for $\ln x$ og $\ln y$:

| $\ln x$ | 4.05 | 5.05 | 5.60 | 6.04 | 6.43 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln y$ | 1.67 | 3.22 | 4.08 | 4.91 | 5.49 |

Vi velger for eksempel linja $\ln y = 1.60 \ln x - 4.8$ (som går gjennom punktene $(3, 0)$ og $(8, 8)$).

b): Den valgte modellen gir

$$y = e^{-4.8}x^{1.60} \approx 8.2 \cdot 10^{-3}x^{1.60}.$$

At vekten av kloa er mer enn halvparten av vekten av hele krabben betyr at

$$y > \frac{1}{2}(x+y),$$

som er det samme som at $y > x$. Men siden ln er en voksende funksjon, er dette igjen det samme som at $\ln y > \ln x$. Dette gir $1.60 \ln x - 4.8 > \ln x$, altså $0.60 \ln x > 4.8$, som igjen er det samme som $\ln x > 8$, altså $x > e^8 \approx 2981$. Vi finner derfor at betingelsen er at vekten $x + y$ av hele krabben må tilfredsstille $x + y = x + 8.2 \cdot 10^{-3}x^{1.60} > 2981 + 8.2 \cdot 10^{-3} \cdot 2981^{1.60} \approx 5951$.

## Oppgave 3

Vi løser først det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt$$

ved substitusjonen $u = 1 + \sqrt{t}$. Siden $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, får vi at integralet er lik

$$\int \frac{2}{u} du = 2\ln|u| + C = 2\ln(1+\sqrt{t}) + C.$$

Det gir:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt = [2\ln(1+\sqrt{t})]_1^4 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}.$$

## Oppgave 4

a): Vi finner

$$f(t) = 900 + 300\cos(\tfrac{\pi}{6}\, t) \text{ og } g(t) = 500 + 500\cos(\tfrac{\pi}{6}\,(t-6)).$$

b): Vi kan skrive

$$g(t) = 500 + 500\cos(\tfrac{\pi}{6}\, t - \pi) = 500 - 500\cos(\tfrac{\pi}{6}\, t),$$

fordi $\cos(\frac{\pi}{6}\,(t-6)) = \cos(\frac{\pi}{6}\, t - \pi) = \cos(\frac{\pi}{6}\, t)\cos(-\pi) - \sin(\frac{\pi}{6}\, t)\sin(-\pi) = -\cos(\frac{\pi}{6}\, t)$. Vi ser da at

$$g(t) - f(t) = -400 - 800\cos(\tfrac{\pi}{6}\, t) = -800(\cos(\tfrac{\pi}{6}\, t) + \tfrac{1}{2}) > 0$$

når $\cos(\frac{\pi}{6}\, t) < -\frac{1}{2}$, altså når $\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{6}\, t < \frac{4\pi}{3}$, det vil si for $t \in (4, 8)$. Vi ser at opptaket er høyere enn utslippene i perioden mellom 1. mai og 1. september.