MAT1000
Våren 2007

Obligatorisk Oppgave 1

Are Johannes Solberg

Oppgave 1a

Det første alternativet innebærer en betalingsplan over 24 måneder som med en prosentvis økning på 5% for hvert avdrag vil gi følgende rekke av innebetalinger:

1. måned: 500
2. måned: $500 \cdot (1{,}05)$
3. måned: $\big(500 \cdot (1{,}05)\big) \cdot (1{,}05) = 500 \cdot (1{,}05)^2$
4. måned: $(500 \cdot (1{,}05)^2) \cdot (1{,}05) = 500 \cdot (1{,}05)^3$

...

24. måned: $500 \cdot (1{,}05)^{23}$

Vi ser at disse avdragene kan settes opp som en geometrisk følge:

$a, ak, ak^2, ak^3, \dots, ak^{23}$

der $a = 500$ og $k = 1{,}05$

Summen av alle 24 avdragene kan skrives som en geometrisk rekke $a + ak + ak^2 + \cdots + ak^{n-1}$ der summen S av de 24 første leddene er gitt ved:

$$S_{24} = a + ak + ak^2 + \cdots + ak^{n-1} = a \cdot \frac{1-k^{24}}{1-k}$$

Setter vi inn verdiene for a, k og regner ut for $n = 24$ får vi

$$S_{24} = a \cdot \frac{1-k^{24}}{1-k} = 500 \cdot \frac{1-1{,}05^{24}}{1-1{,}05} = 22251$$

Totalprisen for alternativ 1 er altså 22251 kr.

Alternativ 2 innebærer 24 innebtalinger à 900 kr, som gir en totalpris på $900 \cdot 24 = 21600$ kr.
Av dette ser vi at alternativ 2 gir en lavere pris enn alternativ 1. Differansen mellom de to alternativene er

$$Alt\ 1 - Alt\ 2 = 22251kr - 21600kr = 651kr$$

SVAR: Alternativ 2 gir lavest pris og er 651 kr rimeligere enn alternativ 1.

Oppgave 1b

Vi benytter oss nå av uttrykket for summen av de 24 avdragene i alternativ 1, men regner med a (størrelsen på det første leddet i rekken, eller det første avdraget i nedbetalingen) som ukjent. Dette uttrykket setter vi lik totalsummen for alternativ 2, som var 21600 kr:

$$21600 = a \cdot \frac{1-1{,}05^{24}}{1-1{,}05}$$

$$a = \frac{21600 \cdot (1-1{,}05)}{1-1{,}05^{24}} \approx 485{,}50$$

SVAR: Dersom de to totalprisene skulle vært like, måtte det første avdraget for alternativ 1 vært på 485,50 kr.

Oppgave 2a

Setter først opp dataene som er oppgitt systematisk:

1 tonn kull	genererer:	600 kWh
	slipper ut:	8 enheter svoveldioksid
		16 enheter svevestøv
	koster:	2000 EUR
1 tonn gass	genererer:	500 kWh
	slipper ut:	24 enheter svoveldioksid
		8 enheter svevestøv
	koster:	3000 EUR

Setter så opp ulikheter som beskriver betingelsene i oppgaven:

Det daglige utslippet skal ikke overstige 120 enheter svoveldioksid:

$$8x + 24y \leq 120 \quad \Leftrightarrow \quad 3y \leq -x + 15 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -\frac{x}{3} + 5$$

der x er antall tonn kull og y er antall tonn gass som brennes.

Det daglige utslippet skal ikke overstige 112 enheter svevestøv:

$$16x + 8y \leq 112 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y \leq 14 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -2x + 14$$

der x er antall tonn kull og y er antall tonn gass som brennes.

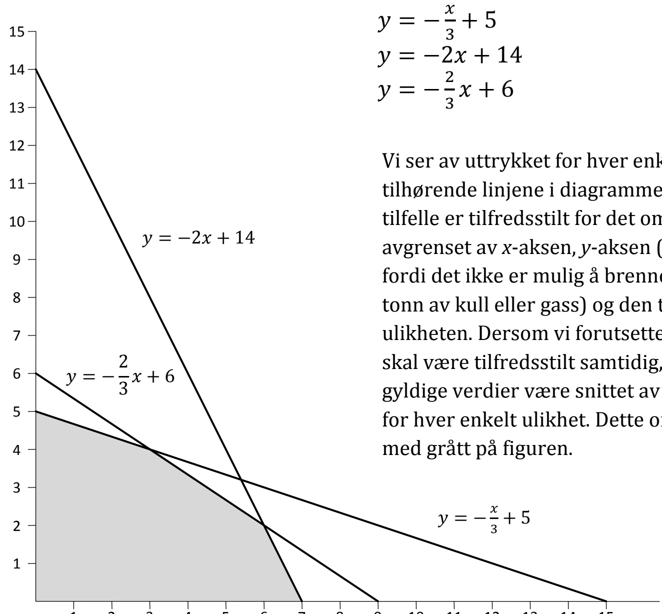
Kraftstasjonen vil ikke bruke mer enn 18 000 EUR per dag til brennstoff:

$$2000x + 3000y \leq 18000 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y \leq 18 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -\frac{2}{3}x + 6$$

der x er antall tonn kull og y er antall tonn gass som brennes.

Setter nå opp en grafisk fremstilling av alle disse ulikhetene i samme koordinatsystem. For alle ulikhetene gjelder det at verdien for y skal ligge *under* linjene gitt ved:

$$y = -\frac{x}{3} + 5$$
$$y = -2x + 14$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 6$$



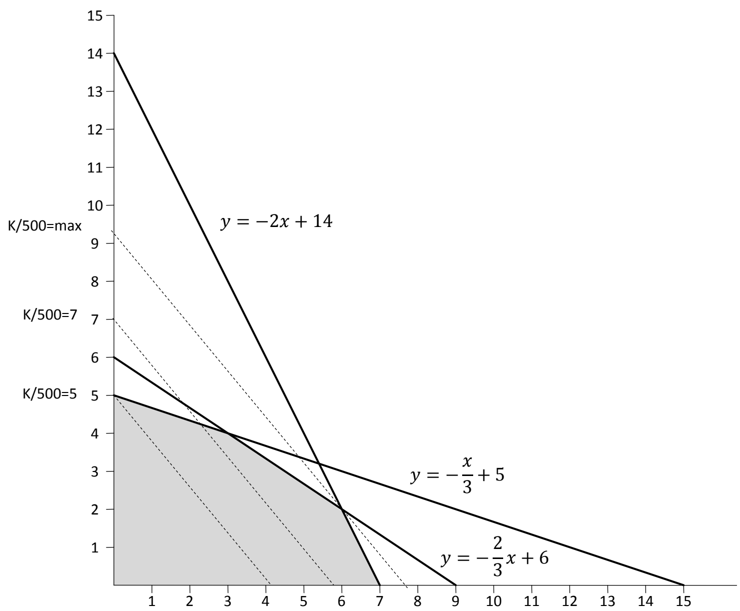
Vi ser av uttrykket for hver enkelt ulikhet og de tilhørende linjene i diagrammet at ulikhetene i hvert tilfelle er tilfredsstilt for det området som ligger avgrenset av x-aksen, y-aksen (avgrenset av aksene fordi det ikke er mulig å brenne et negativt antall tonn av kull eller gass) og den tilhørende linja til ulikheten. Dersom vi forutsetter at alle ulikhetene skal være tilfredsstilt samtidig, må området med gyldige verdier være snittet av gyldighetsområdet for hver enkelt ulikhet. Dette området er markert med grått på figuren.

Oppgave 2b

Vi setter først opp et uttrykk for den totale kraftproduksjonen ved forbrenning av x tonn kull og y tonn gass:

$$K = 600x + 500y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K}{100} = 6x + 5y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{6}{5}x + \frac{K}{500}$$

Dette uttrykket kan settes opp som linjer i diagrammet fra a), der hver linje representerer en verdi n for $\frac{K_n}{500}$. Vi vet også at største verdi for K må forekomme i et av hjørnene på den gråmarkerte figuren i diagrammet.



Ved å studere figuren over der ulike verdier for $K/500$ er illustrert med tilsvarende linje for $y(x)$, ser vi at største verdi for $K/500$ som samtidig ligger i det "tillatte" området for x og y er skjæringspunktet mellom linjene til

$$y = -2x + 14 \quad \text{og} \quad y = -\frac{2}{3}x + 6$$

Dette gir følgende løsning for x:

$$-2x + 14 = -\frac{2}{3}x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}x = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$$

Vi har altså funnet at antall tonn kull, x, må være 6.

Dette kan vi sette inn i uttrykket for linja til $y = -2x + 14$ slik at vi finner verdien til y:

$$y = -2x + 14 \quad \overset{x=6}{\Longleftrightarrow} \quad y = -2 \cdot 6 + 14 = 2$$

Med disse verdiene for x og y kan vi finne kraftproduksjonen ut fra det opprinnelige uttrykket for K:

$$K = 600x + 500y = 600 \cdot 6 + 500 \cdot 2 = 4600$$

SVAR: Kraftstasjonen må forbrenne 6 tonn kull og 2 tonn gass for at kraftproduksjonen skal bli størst mulig innenfor de gitte betingelsene. Kraftproduksjonen blir da på 4600 kWh.

Oppgave 3a

Den minste vinkelen v som har $\cos v = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ er $150°$ eller

$150° \cdot \left(\frac{2\pi}{360}°\right) = \frac{5\pi}{6}\ rad$

Denne vinkelen ligger imidlertid ikke i 3. kvadrant.

Vi har at $\cos v = \cos(2\pi - v)$ og bruker dette til å finne en ny vinkel i 3. kvadrant:

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6}$$

Vinkelen $\frac{7\pi}{6}$ ligger i 3 kvadrant, og er derfor vinkelen vi leter etter.

SVAR: Vinkelen i 3. kvadrant er $\frac{7\pi}{6}$.

Oppgave 3b

$$\cos 2t = 3\sin 2t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2t}{\cos 2t} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan 2t = \frac{1}{3} \quad \Leftarrow \quad 2t = 0{,}322$$

Samtidig vet vi at tangensfunksjonen er periodisk med periode π. Dette betyr at løsningen blir

$$2t = 0{,}322 + n\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{0{,}322 + n\pi}{2}$$

der n er et helt tall.

SVAR: $\cos 2t = 3\sin 2t$ for alle $t = \frac{0{,}322+n\pi}{2}$ der n er et helt tall.

Oppgave 3c

Sinusfunksjonen er periodisk med 2π som periode. Perioden til funksjonen $f(t) = \sin(3t-1)$ kan derfor finnes som differansen mellom verdiene for t slik at:

$3t - 1 = 0$ og $3t - 1 = 2\pi$

Dette gir:

$$3t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{1}{3}$$

og

$$3t - 1 = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t_{2\pi} = \frac{2\pi + 1}{3}$$

Differansen mellom verdiene for t, som også er perioden til funksjonen, er

$$t_{2\pi} - t_0 = \frac{2\pi + 1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Sinusfunksjonen har verdimengde [-1, 1] og derfor vil verdien av $f(t) = \sin(3t-1)$ svinge mellom -1 og 1. Akrofasen til den harmoniske svingningen gitt ved $f(t)$ er definert som den "bølgetoppen" som har lavest *positiv* t-verdi. Ettersom vi vet at denne bølgetoppen, eller ekstremalverdien, til funksjonen har verdien 1, kan vi finne akrofasen ved å finne den laveste verdien av t som tilfredsstiller uttrykket

$\sin(3t-1) = 1$ Dette gir videre

$$\sin(3t-1) = 1 \quad \Leftarrow \quad 3t - 1 = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \frac{\pi + 2}{6}$$

SVAR: Perioden til funksjonen er $\frac{2\pi}{3}$ og akrofasen er $\frac{\pi+2}{6}$