UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

PRØVEEKSAMEN I:	MAT1001 – MATEMATIKK I.
EKSAMENSDAG:	LØRDAG 4.12.2010.
TID FOR EKSAMEN:	KL. 10.00–13.00.
VEDLEGG:	INGEN.
TILLATTE HJELPEMIDLER:	HVER STUDENT HAR LOV TIL Å TA MED SEG ETT TOSIDIG A4-ARK MED VALGFRI TEKST, HÅNDSKREVET ELLER TRYKT, OG GODKJENT KALKULATOR. DESSUTEN ER DET GRUPPELÆRERE TILSTEDE UNDER HELE PRØVEEKSAMEN. DET ER LOV TIL Å SPØRRE OM HJELP, MEN PRØV DEG ALENE FØRST.

OPPGAVESETTET ER PÅ 1 SIDE.

OPPGAVE 1

a) [8 poeng] Finn alle de antideriverte til funksjonen $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$.

Løsning: Vi antideriverer $f(x)$ ved å bruke substitusjon,

$$u = x^2 + x,\ du = (2x+1)dx.$$

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int (2x+1)e^{x^2+x}dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ &= e^{x^2+x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) [10 poeng] En første ordens differensiallikning er gitt ved $y' + (x+1)y = (2x+1)e^{\frac{1}{2}x^2}$. Vi er ute etter den spesielle løsningen til differensiallikningen som tilfredsstiller initialbetingelsen $y(0) = 2$.

Løsning: Vi finner integrerende faktor:

$$f(x) = x+1, \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x, \quad e^{F(x)} = e^{\frac{1}{2}x^2+x}.$$

Løser deretter likningen ved å gange med integrerende faktor, trekke sammen venstre side av likningen og integrere. Bruker svaret fra a).

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}x^2+x}(y'+(x+1)y) &= (2x+1)e^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2+x} \\
(e^{\frac{1}{2}x^2+x}y)' &= (2x+1)e^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2+x} \\
(e^{\frac{1}{2}x^2+x}y)' &= (2x+1)e^{x^2+x} \\
e^{\frac{1}{2}x^2+x}y &= \int (2x+1)e^{x^2+x}dx + C, \qquad C \in \mathbb{R}, \\
e^{\frac{1}{2}x^2+x}y &= e^{x^2+x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}, \\
y &= \frac{e^{x^2+x}+C}{e^{\frac{1}{2}x^2+x}}, \qquad C \in \mathbb{R}, \\
y &= e^{x^2+x-(\frac{1}{2}x^2+x)} + Ce^{-(\frac{1}{2}x^2+x)}, \qquad C \in \mathbb{R}, \\
y(x) &= e^{\frac{1}{2}x^2} + Ce^{-(\frac{1}{2}x^2+x)}, \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Vi bruker så initialbetingelsen for å finne den spesielle løsningen.

$$
\begin{aligned}
y(0) = 2 &= e^{\frac{1}{2}0^2} + Ce^{-(\frac{1}{2}0^2+0)} \\
2 &= 1 + C \\
C &= 1
\end{aligned}
$$

Vi har altså løsning

$$
y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} + e^{-(\frac{1}{2}x^2+x)}
$$

Oppgave 2 En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$
y'' + 2y' + 10y = 0
$$

a) [8 poeng] Finn den generelle løsningen til denne differensiallikningen.

Løsning: Vi finner den karakteristiske likningen til difflikningen,

$$
r^2 + 2r + 10 = 0.
$$

Vi får to komplekse røtter,

$$
r = -1 + 3i \quad \bar{r} = -1 - 3i.
$$

Setter deretter inn i løsningsformel for difflikninger,

$$
y(x) = e^{-x}(C\cos(3x) + D\sin(3x)), \qquad C, D \in \mathbb{R}.
$$

b) [10 poeng] Anta at vi har $y(0) = -\frac{1}{2}$ og $y'(0) = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$. Finn den spesielle løsningen av differensiallikningen som tilfredsstiller disse initialbetingelsene.

Løsning: Bruker initialbetingelsene for å bestemme C og D.

$$
\begin{aligned}
y(0) = -\frac{1}{2} &= e^{-0}(C\cos(3\cdot 0) + D\sin(3\cdot 0)) \\
-\frac{1}{2} &= C.
\end{aligned}
$$

Vi deriverer uttrykket vårt,

$$y'(x) = -e^{-x}(C\cos(3x) + D\sin(3x)) + e^{-x}(-3C\sin(3x) + 3D\cos(3x)).$$

Bruker vi neste initialbetingelse, får vi

$$\begin{aligned}
y'(0) = \frac{1-3\sqrt{3}}{2} &= -e^{-0}(C\cos(3\cdot 0) + D\sin(3\cdot 0)) + e^{-0}(-3C\sin(3\cdot 0) + 3D\cos(3\cdot 0)) \\
\frac{1-3\sqrt{3}}{2} &= -C + 3D \\
\frac{1-3\sqrt{3}}{2} &= \frac{1}{2} + 3D \\
-\frac{3\sqrt{3}}{2} &= 3D \\
D &= -\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Altså får vi spesiell løsning

$$y(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x)\right).$$

Oppgave 3 En andre ordens inhomogen differenslikning er gitt ved

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 3n$$

a) [10 poeng] Finn den generelle løsningen til denne differenslikningen og skriv den på reell form.

Løsning: Siden likningen er inhomogen, vet vi at løsningen er på formen

$$x_n = x_n^h + x_n^s,$$

der x_n^h er den generelle løsningen av den assosierte homogene likningen, og x_n^s er en spesiell løsning som er et polynom.

For å finne x_n^h, finner vi først den karakteristiske likningen til differenslikningen,

$$r^2 + 2r + 10 = 0.$$

Vi får to komplekse røtter,

$$r = 1 + \sqrt{3}i, \quad \bar{r} = 1 - \sqrt{3}i.$$

For å finne reell form, må vi skrive r på eksponentialform før vi bruker løsningsformelen,

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \cos\phi = \frac{1}{2} \\ \sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \qquad \phi = \frac{\pi}{3}.$$

Vi får da ved løsningsformelen,

$$x_n^h = 2^n \left(C\cos(\frac{\pi}{3}n) + C\sin(\frac{\pi}{3}n) \right)$$

Videre gjetter vi $x_n^s = An + B$ og setter det inn i likningen.

$$\begin{aligned} A(n+2) + B - 2(A(n+1) + B) + 4(An+B) &= 3n \\ An + 2A + B - 2An - 2A - 2B + 4An + 4B &= 3n \\ 3An + 3B &= 3n \end{aligned}$$

Dette gir $3A = 3$, det vil si $A = 1$, og $3B = 0$, det vil si $B = 0$.
Totalt har vi da

$$x_n^s = n.$$

Den generelle løsningen av differenslikningen er altså

$$x_n = 2^n \left(C\cos(\frac{\pi}{3}n) + D\sin(\frac{\pi}{3}n) \right) + n, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

b) [6 poeng] Gitt $x_0 = 1$, vis ved utregning at $x_{21} = 21 - 2^{21}$.

Løsning: Bruker initialbetingelsen,

$$\begin{aligned} x_0 = 1 &= 2^0 \left(C\cos(\frac{\pi}{3}0) + D\sin(\frac{\pi}{3}0) \right) + 0 \\ 1 &= C. \end{aligned}$$

Vi har altså

$$x_n = 2^n \left(\cos(\frac{\pi}{3}n) + D\sin(\frac{\pi}{3}n) \right) + n, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Og selv om vi ikke har bestemt D, kan vi allikevel regne ut x_{21},

$$\begin{aligned} x_{21} &= 2^{21} \left(\cos(\frac{\pi}{3} \cdot 21) + D\sin(\frac{\pi}{3} \cdot 21) \right) + 21 \\ x_{21} &= 2^{21} \left(\cos(7\pi) + D\sin(7\pi) \right) + 21 \\ x_{21} &= 2^{21} \left(\cos(3 \cdot 2\pi + \pi) + D\sin(3 \cdot 2\pi + \pi) \right) + 21 \\ x_{21} &= 2^{21} \left(\cos(\pi) + D\sin(\pi) \right) + 21 \\ x_{21} &= 2^{21} \left(-1 + D \cdot 0 \right) + 21 \\ x_{21} &= 21 - 2^{21}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) [8 poeng] Beregn $\int \frac{dy}{y^2-y}$.

Løsning:

$$\frac{1}{y^2-y} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

Vi får ligningen

$$1 = A(y-1) + By = (A+B)y - A$$

som gir $A = -1$ og $B = 1$. Vi har derfor

$$\int \frac{dy}{y^2-y} = \int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})dy = ln|y-1| - ln|y| + C = ln|\frac{y-1}{y}| + C = ln|1 - \frac{1}{y}| + C$$

b) [7 poeng] Finn en funksjon $y(t)$ slik at $y' = 2(y^2 - y)$ og $y(0) = 2$. (I regningen kan du anta at $y > 1$.)

Løsning:

$$\frac{dy}{dt} = 2(y^2 - y)$$

$$\frac{dy}{y^2-y} = 2dt$$

Vi integrerer hver side og setter disse lik hverandre :

$$\int \frac{dy}{y^2-y} = ln|1 - \frac{1}{y}| = ln(1 - \frac{1}{y})$$

$$\int 2dt = 2t + C$$

$$ln(1 - \frac{1}{y}) = 2t + C$$

$$1 - \frac{1}{y} = e^C e^{2t} = Ce^{2t}$$

$y(0) = 2$ gir $1 - \frac{1}{2} = C$, dvs $C = \frac{1}{2}$. Dette gir

$$1 - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$\frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$y = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{2t}}$$

SLUTT