REPETISJON 1

Lineær ligninger i n ukjente $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \xrightarrow{\text{Matrise.}} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Löses slik:

Gauss eliminasjon:

1) Bytt om rekkefölgen om nödvendig for å få 1 överst til venstre.

foran ledende variabel.
2) Fjern den ledende variablen fra alle de påfölgende ligningene
3) Fra nå av opererer vi bare vi bare på de resterende lign.

Gå tilbake til 1.

Dette gir matrisen på trappeform. Ledende / ikke ledende variable

- Löser nå nedenfra og opp.
- Ikke ledende variable velges fritt, bruk parametre s, t, u, ...
- Ledende variabler löses ut.

Kvadratiske matriser har determinant:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

n ligninger og n ukjente $A\vec{x} = \vec{b}$.

Vi har nöyaktig en lösning $\vec{x}$ $\iff$ det $A \neq 0$.

Hvis det A = 0, har vi enten ingen eller uendelig mange lösninger, dvs enten motsigende lign eller minst en variabel kan velges fritt.

Oppgave H 2008-2.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ 2y + \gamma z &= -1 \end{aligned}$$

For hvilke γ har vi lösning og hva er den?

Kommentar om determinant.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ & 2 & \gamma & -1 \end{bmatrix} \overset{-2R_1 \text{ til } R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \gamma & -1 \end{bmatrix} \overset{-2R_2 \text{ til } R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

$\gamma z = 1$. Lösning når $\gamma \neq 0$, $z = \frac{1}{\gamma}$

$y = -1$

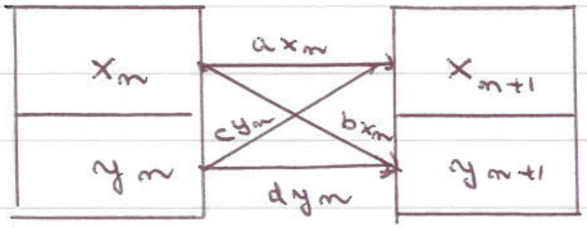
$x - y + z = 1$

$x = 1 + y - z = 1 + (-1) - \frac{1}{\gamma} = -\frac{1}{\gamma}.$

Svar: Lösning når $\gamma \neq 0$.

Lösningen er $x = -\frac{1}{\gamma}$, $y = -1$ og $z = \frac{1}{\gamma}$.

Populasjonsdynamikk



$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Hva er $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$?

Analyseres med egenverdier / egenvektorer.

M kvadratisk matrise. λ er egenverdi hvis det fins $\vec{x} \neq \vec{0}$ slik at $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

λ er egenverdi $\Leftrightarrow$ $\det(M - \lambda I) = 0$.

For hver egenverdi har vi egenvektoren $\vec{x}$, som alltid inneholder (minst) en fri parameter.

Oppgave V2010-4.

Gitt $P > 0$, $P \neq 1$.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1-P \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

a) Egenverdier

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-P \\ 0 & P-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(P-\lambda) = 0$$

$\lambda = 1$ og $\lambda = P$.

Egenvektorer : $\lambda = 1$.

$$(1-P)y = 0 \quad , \text{dvs. } y = 0 , x = s$$

Egenvektorer $\begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. for $\lambda = 1$

$\lambda = P$.

$$(1-P)x + (1-P)y = 0$$

$$x + y = 0 \quad , x = -y$$

$y = t$, $x = -t$

Egenvektorer $\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hva er $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

Må skrive $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ som sum av egenvektorer.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t \\ t \end{bmatrix}$$

$t = 1$

$s - t = 3 \Rightarrow s = t + 3 = 4$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Eg.v. } 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Eg.v. } P.}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = M^n \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1^n \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + P^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - P^n \\ P^n \end{bmatrix}.$$

c) Når eksisterer $\lim \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ og hva er den?

Svar: Eksisterer når $P<1$. $\lim \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En tallfölge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x_0, x_1, \ldots$

kalles konvergent hvis den nærmer seg et tall $a \in \mathbb{R}$ når $n \to \infty$. dvs

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Ellers kalles den divergent.

Eks. $x_n = a^n$
$\begin{cases} \text{Konvergent mot } 0 \text{ hvis } |a|<1, (-1<a<1). \\ \qquad\qquad\quad 1 \text{ hvis } a=1 \\ \text{Divergent hvis } |a|>1 \text{ eller } a=-1. \end{cases}$

1. ordens differensligning

Homogen: Finn x_n slik at

$$x_{n+1} = r x_n \quad , \quad x_{n+1} - r x_n = 0$$

Generell lösning $x_n = C r^n$

$(x_{n+1} + r x_n = 0 \ , \ x_n = C(-r)^n)$.

Inhomogen $x_{n+1} = r x_n + f(n)$, $x_{n+1} - r x_n = f(n)$

Generell lösning = Generell lösning av den homogene $x_n^h = C r^n$

+ En spesiell (partikulær lösning) x_n^o av den inhomogene.

$f(n)$ polynom av grad m.

Part. lösning: $r \neq 1$ x_n^o polynom av samme grad m.

$r = 1$ x_n^o polynom av grad $m+1$ (uten konstantledd).

B.2.29. $x_{n+1} + 2x_n = 3n \qquad n \geq 0 \quad , x_0 = 0.$

Generell lösning homogen : $x_n^h = C \cdot (-2)^n$

Part. lösning $\quad x_n = An + B$

$$x_{n+1} + 2x_n = A(n+1) + B + 2(An + B) = An + A + B + 2An + 2B$$

$$= 3An + (A + 3B) = 3n$$

$3A = 3 \Rightarrow A = 1$

$A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}A = -\frac{1}{3}. \qquad x_n^p = n - \frac{1}{3}$

Generell lösning

$$x_n = C(-2)^n + n - \frac{1}{3}$$

$$x_0 = C - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

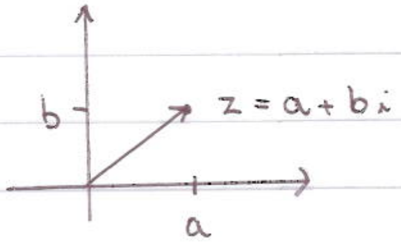
$$x_n = \frac{(-2)^n}{3} + n - \frac{1}{3}.$$

REPETISJON 2.

- Komplekse tall er på formen

$$z = a + bi$$

der a, b er reelle tall.



- Hvis $k > 0$, så er $\sqrt{-k} = \pm\sqrt{k}\, i$

$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$

- Løsning av annengradslegning

$$az^2 + bz + c = 0 \quad , \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

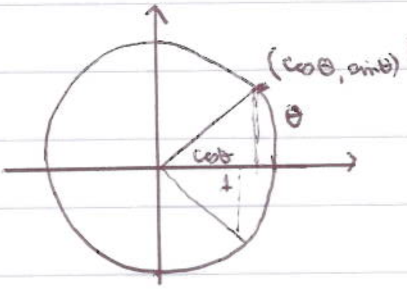
Tre muligheter

$\Delta > 0$: To reelle røtter

$\Delta \neq 0$: En reel rot

$\Delta < 0$: To komplekse røtter $z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\Delta}\, i$, $z = r, \bar{r}$

-



Grader / radianer

$360^\circ = 2\pi$

$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ $\quad 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$

$180^\circ = \pi$

$60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

$\sin\theta = \cos(\theta \mp \frac{\pi}{2})$

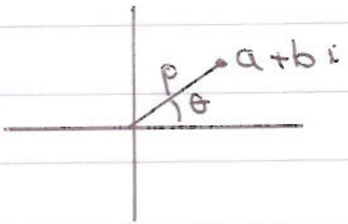
På figur.

$\sin -\theta = -\sin\theta$

$\cos -\theta = \cos\theta$.

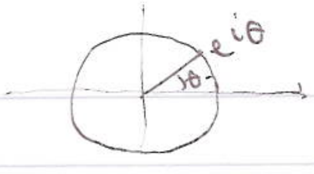
- Fortegn, verdier, sinus og cosinus

- Komplekse tall på polar form



$$a + bi = \rho e^{i\theta}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$,



- Andre ordens homogene lineære differensligninger.

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

Kar. ligning. $ar^2 + br + c = 0$

Løsning kar. ligning.	Generell løsning differensligning
1) To reelle r_1, r_2	$x_n = C r_1^n + D r_2^n$
2) En reell r_1	$x_n = (C + Dn) r_1^n$
3) Komplekse $r = \rho e^{i\theta}$ $(\bar{r} = \rho e^{-i\theta})$	$x_n = C \rho^n \cos n\theta + D \rho^n \sin n\theta$

- Inhomogen

$$a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$$

- Generell løsning inhomogen ligning = Generell løsning homogen ligning + En vilkårlig (partikulær) løsning av den inhomogene

$$x_n = x_n^h + x_n^p$$

- Hvis vi har gitt initialbetingelser, kan vi finne C og D.

- Partikulær løsning når $f(n)$ er polynom av grad k:

1 er ikke rot : x_n^p polynom av grad k

1 er rot, men ikke dobbel : x_n^p $k+1$ (uten konstantledd)

1 er dobbel rot : $k+2$ (uten konst og [illegible])

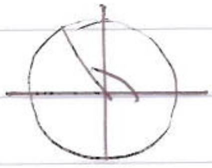
Oppgave V 2009 - 4.

a) Generell løsning av $x_{n+2}+x_{n+1}+x_n = 3n+3$.

Kar. ligning $r^2+r+1=0$

$$r = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} = -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1, \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho} = a = -\frac{1}{2}, \quad \theta = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$



$$x_n^h = C1^n\cos n\frac{2}{3}\pi + D\cdot 1^n\cdot\sin n\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$= C\cos n\frac{2}{3}\pi + D\sin n\cdot\frac{2}{3}\pi.$$

Inhomogen

$$x_n^p = An+B$$

$$x_{n+2}+x_{n+1}+x_n = A(n+2)+B+A(n+1)+B+An+B$$

$$= \cancel{An}+2A+\cancel{B}+\cancel{An}+\cancel{A}+\cancel{B}+\cancel{An}+\cancel{B} = 3An+(3A+3B) = 3n+3$$

$3A=3$, $A=1$ $\quad x_n^p = n$

$3A+3B=3$, $B=0$.

$$x_n = C\cos n\frac{2}{3}\pi + D\sin n\frac{2}{3}\pi + n$$

b) $x_0=1$, $x_1=\frac{1}{2}$

$$x_0 = C\cos 0 + D\sin 0 = C = 1$$

$$x_1 = C\cos\frac{2}{3}\pi + D\sin\frac{2}{3}\pi =$$

$$-\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{3}D = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}D = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}D = 1$, $D = \frac{2}{\sqrt{3}}$

<u>H 2009 - 4</u>

a) Generell lösning $x_{n+2} - x_n = 4n - 2$

Kar. ekv. $r^2 - 1 = 0$, $r^2 = 1$, $r = \pm 1$.

Generell lösning homogen $x_n = C \cdot 1^n + D(-1)^n = C + D(-1)^n$

Partikulär lösning $x_n^p = An^2 + Bn$

$$x_{n+2}^p - x_n^p = A(n+2)^2 + B(n+2) - An^2 - Bn$$

$$= \cancel{An^2} + 4An + 4A + \cancel{Bn} + 2B - \cancel{An^2} - \cancel{Bn} = 4An + 4A + 2B$$

$$= 4n - 2$$

$4A = 4$, $A = 1$

$4A + 2B = -2$

$2B = -2 - 4A = -6$, $B = -3$ $\qquad x_n^p = n^2 - 3n$

Generell lösning

$$x_n = C + D(-1)^n + n^2 - 3n$$

b) $x_0 = x_1 = 0$

$x_0 = C + D = 0$

$x_1 = C - D + 1 - 3 = 0$

$C - D = 2$

$2C = 2$, $C = 1$, $D = -1$.

$$\underline{x_n = 1 + (-1)^{n+1} + n^2 - 3n}$$

- Polynomer: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Ser ut som $a_n x^n$ for n stor. Har höyst n nullpunkter.

- Rasjonale funksjoner $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q polynomer

Har vertikale asymptoter når $q(x) = 0$.

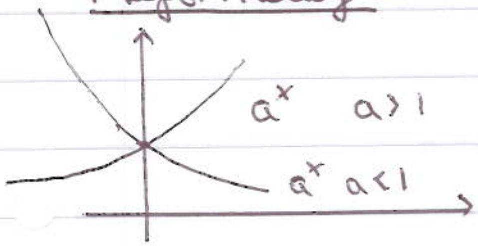
Oppförsel når $x \to \infty$ avhenger av gradene til p og q.

<u>Oppgave A.10.3d.</u>

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x^3}{8 + 7x^2} = \lim \frac{1 - 4x}{\frac{8}{x^2} + 7} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x^3}{8 + 7x^3} = \lim \frac{\frac{1}{x} - 4}{\frac{8}{x^3} + 7} = \frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}.$$

<u>Eksponensiell.</u>



$(a^x)' = (\ln a)\, a^x$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{bx})' = b e^{bx}$ $\int e^{bx} dx = \frac{1}{b} e^{bx} + C.$

$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

$(e^x)^y = e^{xy}$

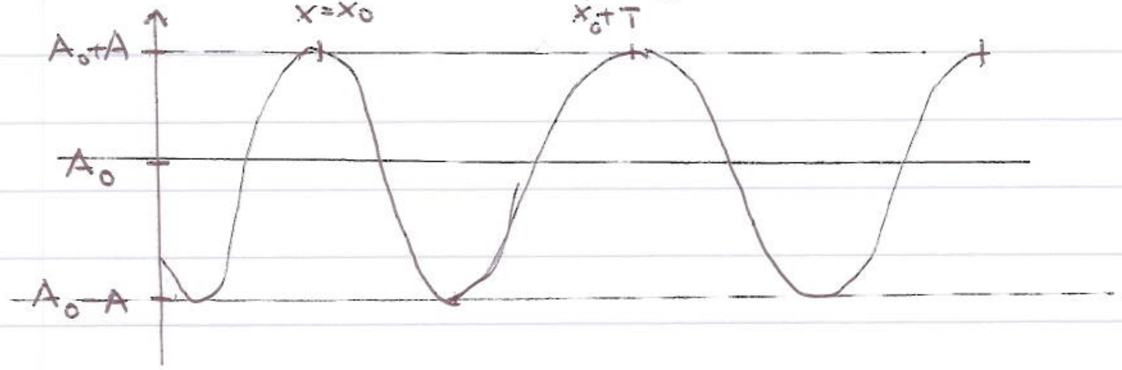
<u>Logaritmefunksjon</u> Naturlig logaritme $e^{\ln x} = x$, $x > 0$. , $\ln(e^x) = x$.

$\ln ab = \ln a + \ln b$ $a, b > 0$. , $\ln a/b = \ln a - \ln b$.

$\ln a^b = b \ln a$ $a > a$

$(\ln x)' = \frac{1}{\ }$ $\int \frac{1}{\ } dx = \ln|x|$ $\int \frac{1}{\ } dx = \frac{1}{\ } \ln|ax+b| + C$

Generell harmonisk svingning



Middelverdi A_0, amplitude A, Akrofase x_0 $(<T)$, periode T, vinkelfrekvens $\omega = \frac{T}{2\pi}$

$$f(x) = A_0 + A\cos\omega(x-x_0).$$

Oppgave 8c. $f(t) = \sin(4\pi t - 8) = \cos\left(4\pi t - 8 - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \cos 4\pi\left(t - \frac{8}{4\pi} - \frac{\pi}{2\cdot 4\pi}\right) = \cos 4\pi\left(t - \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{8}\right)\right).$$

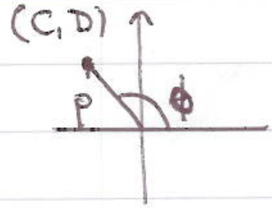
Middelverdi 0, amplitude 1, $\omega = 4\pi$, $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$.

$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$, må trekke fra $\frac{1}{2}$: $\frac{2}{\pi} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$

Akrofase: $\underline{\underline{\frac{2}{\pi} - \frac{3}{8}.}}$

Sum av harmoniske svingninger

$$C\cos\theta + D\sin\theta = A\cos(\theta - \phi)$$

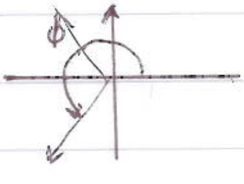


$A = \sqrt{C^2 + D^2}$

$\cos\phi = \frac{C}{A}$ $\quad\phi = \cos^{-1}\left(\frac{C}{A}\right)$ (~~+π hvis 2/3~~ 3/4 ~~kvadrant~~).

Oppgave 10b. $-\cos\frac{x}{4} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{4}$

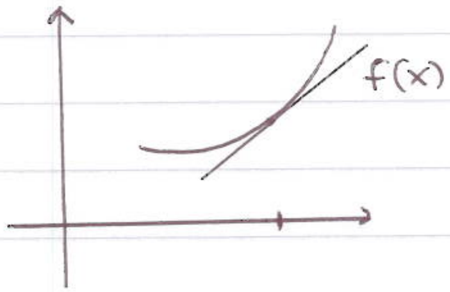
$A = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$



$\cos\phi = -\frac{1}{2}$

$\phi = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

REPETISJON 3.



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

= stigningstall for tangenten i punktet $(x, f(x))$

= momentan forandring av f pr. enhets forandring i den variable.

Derivasjonstabell.

f	f'	For hvilke x
x^n, n pos. heltall	$n x^{n-1}$	alle x
x^n, n neg. heltall	$n x^{n-1}$	$x \neq 0$
x^r, $r \in \mathbb{R}$	$r x^{r-1}$	$x > 0$
e^x	e^x	alle x
a^x $(a>0)$	$a^x \cdot \ln a$	alle x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$.
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$.
$\sin x$	$\cos x$	alle x
$\cos x$	$-\sin x$	
$f(x)g(x)$	$f'g + fg'$	Hvor definert
$f(x)/g(x)$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$	— " —
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$.	— " —

A. 11. 5d. Deriver $f(x) = e^{(2x^2+\ln(x+2))}$

$$f'(x) = e^{2x^2+\ln(x+2)} \cdot \left(2x^2+\ln(x+2)\right)'$$

$$= e^{2x^2+\ln(x+2)} \cdot \left(4x + \frac{1}{(x+2)} \cdot (x+2)'\right)$$

$$= e^{2x^2+\ln(x+2)} \left(4x + \frac{1}{x+2}\right)$$

1. ordens lineær differensialligning

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Løsning:

1) Beregn integrerende faktor $m(x) = e^{\int f(x)dx}$.

($\int f(x)dx$ uten integrasjonskonstant C).

Stryk eventuelle tallverdier!

2) Ved å gange med $m(x)$ blir ligningen

$$(m(x)y)' = m(x)g(x)$$

så

$$m(x)y = \int m(x)g(x)\,dx$$ (Her tas C med!).

Løses for y!

Problem: Å finne antideriverte $\int f(x)dx$!

Integrasjon

Integrasjonstabell.

f	$\int f$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$(ax+b)^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{a} (ax+b)^{n+1} + C$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln \lvert ax+b \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + C.$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$+\sin x + C$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a} \cos ax + C$
$\cos ax$	$\frac{1}{a} \sin ax + C.$

Integrasjonsteknikker.

I) <u>Substitusjon</u> Hvis $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

så er $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$

Vanligvis finner vi f først etter litt regning.

1) Velg u som del av integranden

$$u = g(x)$$
$$du = g'(x)\,dx$$

2) Erstatt alle x uttrykk med u - uttrykk og integrer i u. (Hva f er dukker her opp.)

<u>Oppgave H 2008 - 1.</u>

a) $\int x e^{x^2} dx = \int e^{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} e^{u} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C.}}$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$x\,dx = \frac{1}{2} du$

b) Finn y slik at $y' + \frac{1}{x} y = 2 e^{x^2}$ for $x > 0$ og $y(1) = 0.$

Int. faktor $m(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x \quad (x > 0.)$

Mult med x :

$$(xy)' = 2x e^{x^2}$$

$$xy = \int 2x e^{x^2} dx = 2\left(\tfrac{1}{2} e^{x^2} + C\right) = e^{x^2} + C.$$

Generell løsning $\quad y = \dfrac{e^{x^2} + C}{x}$

$y(1) = \dfrac{e + C}{1} = e + C = 0 \ , \ C = -e$

$$y = \frac{e^{x^2} - e}{x}$$

2) Delvis integrasjon

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$$

<u>Eks. H 2009-1.</u>

a) $\int x^2 e^x dx = x^2e^x - \int 2x e^x dx = x^2e^x - (2xe^x - \int 2e^x dx)$

$u = x^2 \quad u' = 2x \qquad\qquad u = 2x \quad u' = 2$

$v' = e^x \quad v = e^x \qquad\qquad v' = e^x \quad v = e^x$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = \underline{(x^2-2x+2)e^x + C}.$

b) Finn y slik at $y' + y = x^2$ og $y(0) = 1$.

Int. faktor $m(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$

Ganger med e^x:

$$(e^x y)' = x^2 e^x$$

$$e^x y = \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$$y = (x^2 - 2x + 2) + Ce^{-x}$$

$y(0) = 2 + C = 1$, $C = -1$.

$$\underline{\underline{y = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}}}.$$

3) Delbrøksoppspaltning

$$\int \frac{p(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\quad(x-r_m)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \cdots + \frac{A_m}{x-r_m}\,dx$$

$$= A_1 \ln|x-r_1| + \cdots + A_m \ln|x-r_m| + C$$

Forutsetninger : 1) $r_1, \dots, r_m$ er forskjellige

2) Grad $(p) < m$.

Eks. A.11.9c.

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Teller : $A(x+2) + B(x-2) = (A+B)x + 2(A-B) = 1$

$A+B=0$ $\quad A=\frac{1}{4}$

$2(A-B)=1$

$A-B=\frac{1}{2}$ $\quad B=-\frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-2| - \ln|x+2| \;+ C = \underline{\underline{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.}}$$

REPETISJON 4

V 2009-2 $y' = \frac{y}{t^2}$ $y > 0$

a) Generell lösning:

$$y' - \frac{1}{t^2} y = 0$$

Integrerende faktor $m(t) = e^{\int -\frac{1}{t^2}dt} = e^{\int -t^{-2}dt} = e^{t^{-1}} = e^{\frac{1}{t}}$

Ligningen blir $(e^{\frac{1}{t}} y)' = 0$

$$e^{\frac{1}{t}} y = C$$

$$\underline{\underline{y = Ce^{-\frac{1}{t}}}} \qquad C > 0.$$

b) $y(1) = Ce^{-1} = 1$, $C = e$

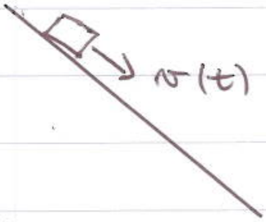
$$y = e\,e^{-\frac{1}{t}} = \underline{\underline{e^{(1-\frac{1}{t})}}}$$

Når $t \to \infty$ vil $-\frac{1}{t} \to 0$ og $e^{-\frac{1}{t}} \to e^0 = 1$, dvs.

$$\lim_{t\to\infty} y = e \cdot 1 = e.$$

V 2009-3.

$$v'(t) + kv(t) = a$$



$$v' + kv = a \qquad , \quad a, k > 0.$$

a) Finn v slik at $v(0)=0$.

Int. faktor $m(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$

Ligningen blir $(e^{kt}v)' = ae^{kt}$

$$e^{kt}v = \int a e^{kt} dt = a \cdot \frac{1}{k} e^{kt} + C$$

$$v = \frac{a}{k} + Ce^{-kt} \qquad \text{(generell løsning).}$$

$$v(0) = \frac{a}{k} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{a}{k}$$

$$v = \frac{a}{k} - \frac{a}{k}e^{-kt} = \underline{\frac{a}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}.$$

b) Når $t \to \infty$? Da vil $-kt \to -\infty$ og $e^{-kt} \to 0$, dvs.

$$\lim_{t \to \infty} v = \frac{a}{k}.$$

Separable diff. ligninger

Er på formen

$$p(y)y' = q(x)$$

$$p(y)\frac{dy}{dx} = q(x)$$

$$p(y)\,dy = q(x)\,dx$$

1) Integrer hver side

$$\int p(y)\,dy = P(y)$$

$$\int q(x)\,dx = Q(x) + C \quad \leftarrow \text{Ta med C her}$$

2) Løse $P(y) = Q(x) + C$ for y.

Definisjonsområde avhenger av P, Q og C.

H 2008-4   Kaninpopulasjon $y(t)$ slik at

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y^2 \qquad \lambda > 0.$$

a) Generell lösning.

$$\frac{dy}{y^2} = \lambda dt$$

Int. hver side

v.s. $\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$

H.S. $\int \lambda dt = \lambda t + C$

$$-\frac{1}{y} = \lambda t + C$$

$$\underline{\underline{y = \frac{-1}{\lambda t + C}}}$$

b) $y(0) = N$.

$$y(0) = -\frac{1}{C} = N \Rightarrow C = -\frac{1}{N}$$

$$y(t) = \frac{-1}{\lambda t - \frac{1}{N}} = \frac{-N}{N\lambda t - 1} = \underline{\underline{\frac{N}{1 - N\lambda t}}}$$

c) Ser at $y(t)$ går mot ∞ når nevneren går mot 0, dvs. for t slik at $1 - N\lambda t = 0$, dvs $\underline{\underline{t = \frac{1}{N\lambda}}}$

H 2009-2 Kjemisk reaksjon $A+B \to C$. Mengden av C som er dannet

$$y' = k(P-y)^2 \qquad k>0.$$

a) Finn $y(t)$.

$$\frac{dy}{dt} = k(P-y)^2$$

Sep. var. $(P-y)^{-2}dy = kdt$

Int. hver side

V.S $\int (P-y)^{-2}dy = (P-y)^{-1}$

H.S $\int kdt = kt + C$

$$\frac{1}{P-y} = kt + C$$

$$P-y = \frac{1}{kt+C}$$

$$\underline{\underline{y = P - \frac{1}{kt+C.}}}$$

b) $y(0)=0$ gir

$$y(0) = P - \frac{1}{C} = 0, \quad C = \frac{1}{P}.$$

$$y = P - \frac{1}{kt+\frac{1}{P}} = P - \frac{P}{Pkt+1} = \frac{P^2kt+P-P}{Pkt+1} = \underline{\underline{\frac{P^2kt}{Pkt+1}}}$$

c) Hva skjer når $t \to \infty$? Da vil $kt + \frac{1}{P} \to \infty$ og $\frac{1}{kt+\frac{1}{P}} \to 0$, altså $\lim y = P$.

REPETISJON 5.

- Andre ordens lineære homogene diffligninger med konstante koeffisienter

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Karakteristisk ligning $ar^2 + br + c = 0$.

Rötter	Lösning
To reelle r_1 og r_2	$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$
En reell r	$y = e^{rx}(C + Dx)$
Komplekse $r = a \pm bi$	$y = e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$.

- Gitt to initialbetingelser kan vi finne C og D.

Oppgave H2008-3.

a) Finn generell lösning av

$$y'' + y' + y = 0$$

Kar. lign. $r^2 + r + 1 = 0$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$$

$$\underline{\underline{y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x + D\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)}}$$

b) Finn y slik at $y(0) = 0$ og $y'(0) = \sqrt{3}$

$$y(0) = e^0(C\cos 0 + D\sin 0) = C = 0 \Rightarrow y = De^{-\frac{1}{2}x}\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x$$

$$y' = D\left(e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x + e^{-\frac{1}{2}x}\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

$y'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,D = \sqrt{3}$, dvs. $D = 2$

②

V 2009-1

a) Finn generell løsning av

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$$

Kar. ligning. $r^2 + r + \frac{1}{4} = 0$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{y = e^{-\frac{1}{2}x}(C + Dx)}}$$

b) Finn y slik at $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$

$$y(0) = e^0(C) = C = 1 \Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}x}(1 + Dx)$$

$$y' = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 + Dx) + e^{-\frac{1}{2}x} \cdot D$$

$y'(0) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 1 \cdot D = -\frac{1}{2} + D = -\frac{1}{2}$, dvs $D = 0$

$$\underline{\underline{y = e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

Eksempler $y(t)$

- Relativ vekstrate $\frac{y'}{y}$

- Eksponentiell vekst : $\frac{y'}{y} = k$ $(k>0)$ $y = Ce^{kt}$, Fordoblingstid $t = \frac{\ln 2}{k}$

- Eksp. fall : $\frac{y'}{y} = -k$ $y = Ce^{-kt}$, Halveringstid $t = \frac{\ln 2}{k}$

$$k = \frac{\ln 2}{t}$$

V 2010 - 3. $z' = -kz$, $k > 0$

a) Finn lösning : $\underline{z = Ce^{-kt}}$.

b) Hvis $z(0) = N$ og $z(5730) = \frac{N}{2}$, hva er lösningen

$z(0) = C = N$, dvs $z = Ne^{-kt}$

$$z(5730) = Ne^{-5730k} = \frac{N}{2}$$

$$e^{-5730k} = \frac{1}{2}$$

$$-5730k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{5730}$$

$$z(t) = Ne^{-\frac{t\ln 2}{5730}}$$

c) $z(t) = \frac{4}{5}N$. Hvor gammel er pröven ?

$$Ne^{-\frac{t\ln 2}{5730}} = \frac{4}{5}N$$

$$e^{-\frac{t\ln 2}{5730}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$-t\frac{\ln 2}{5730} = \ln 0.8$$

$$t = -\frac{5730 \cdot \ln 0.8}{\ln 2} \approx 1844$$

?: Tretavlen er fra ca. $2010 - 1844 = 166$.

Altså ikke Pytagoras (580-500 f.Kr.).