Kapittel 2

Antiderivering

I dette og neste kapittel skal vi bli kjent med noen typer difflikninger og lære hvordan disse kan løses. Til dette trenger vi derivering og antiderivering.

2.1 Derivasjon

I Kapittel 1 har vi sett på ulike funksjoner som kan tenkes å beskrive ulike fenomener. Et sentralt begrep som fort dukker opp når vi studerer et fenomen (i tillegg til tid) er **forandring**. Alt forandres hele tiden. Ingenting er slik det var igår, eller for ett sekund siden.

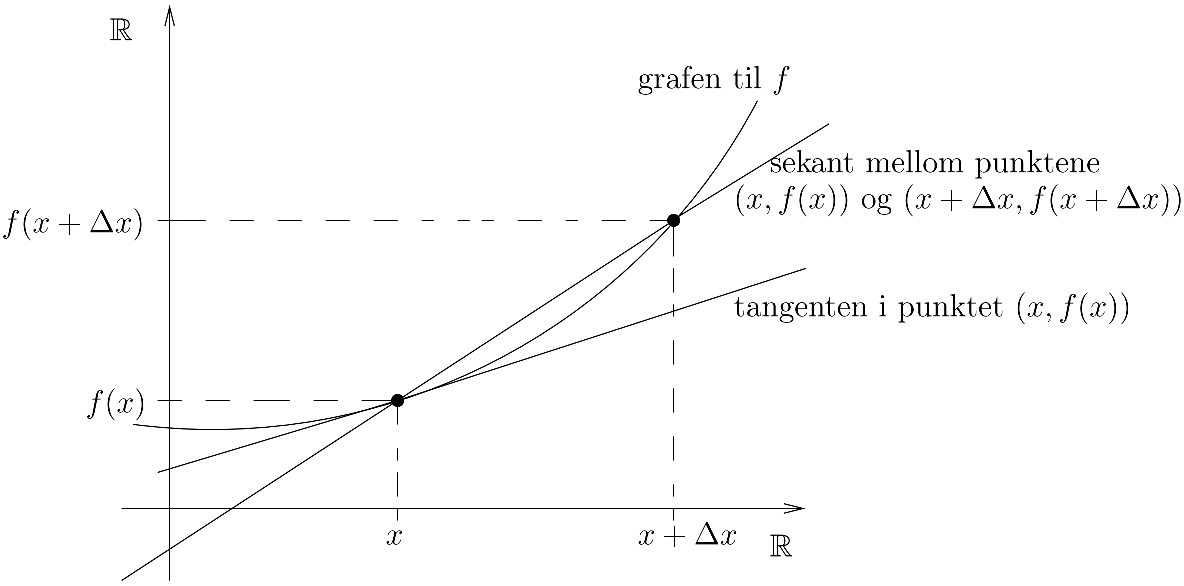
For en funksjon f kan vi se på grenseverdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

som måler den *'momentane forandringen'* til funksjonen f i punktet x. Når denne grenseverdien eksisterer sier vi at f er *deriverbar* i x og kaller (2.1) den *deriverte* til f i x, som skrives $f'(x)$.

Når vi lar x variere i D_f får vi en ny funksjon f', den deriverte til f, gitt ved $f'(x)$ for alle x der $f'(x)$ eksisterer.

Vi tar med tegningen som gjerne følger med (2.1):



Husk: En sekant til en graf er linjen som forbinder to punkter på grafen. Stigningstallet til sekanten mellom punktene $(x, f(x))$ og $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ er uttrykket

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Tangenten i et punkt på en graf er linjen som kun berører punktet og ingen andre punkter på grafen 'i umiddelbar nærhet'. Mer presist er tangenten til f i punktet $(x, f(x))$ definert som linjen gjennom $(x, f(x))$ med stigningstall $f'(x)$.

I de punktene hvor vi kan måle en forandring (dvs. når f er deriverbar) er forandringen gitt matematisk ved funksjonen f' der

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Geometrisk måles altså forandringen i et punkt ved hjelp av stigningstallet til tangenten i punktet.

Vi minner om følgende deriverte funksjoner fra 2MX og legger til et par regler:

- $(a)' = 0$ der $a \in \mathbb{R}$
- $(x^r)' = rx^{r-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \; a \in \mathbb{R}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Eksempel 2.1 Den deriverte funksjonen til

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

er

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

for $x > 0$. For $x = 0$ eksisterer ikke den deriverte. ■

Eksempel 2.2 Den deriverte funksjonen til

$$g(x) = x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0$$

er

$$g'(x) = (x^{-\frac{2}{3}})' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}.$$

■

Når vi måler vinkler i radianer, kan det vises at:

- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sin x)' = \cos x$

Se på grafene til $\cos x$ og $\sin x$ (i Seksjon 1.7): For hver x-verdi ser vi at forandringen til $\cos x$ er lik den negative sinusverdien i punktet, og forandringen til $\sin x$ er lik cosinusverdien i punktet.

La nå funksjonene f og g være deriverbare i punktet x. Da har vi følgende derivasjonsregler:

- Derivere en funksjon multiplisert med en konstant, $a \in \mathbb{R}$:

$$(af)'(x) = a \cdot f'(x)$$

- Derivere en sum: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Derivere en differanse: $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- Derivere et produkt (produktregelen):

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

- Derivere en brøk (brøkregelen):

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0$$

- Derivere en sammensatt funksjon (*kjerneregelen*):
  Hvis $h(x) = f(g(x))$ og f i tillegg er deriverbar i $g(x)$, er

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Vi minner om at to størrelser a og b er *proporsjonale*, skrevet

$$a \propto b,$$

hvis forholdet mellom dem er konstant, dvs. $\frac{a}{b}$ er konstant lik en $r \in \mathbb{R}$, så

$$a = rb, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 2.3 Vi legger spesielt merke til at kjerneregelen gir

$$(e^{rx})' = re^{rx}, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

dvs. $(e^{rx})'$ og e^{rx} er proporsjonale størrelser for hver verdi av x. ■

Eksempel 2.4 Vi kan bruke brøkregelen og finne den deriverte funksjonen til $\tan x$:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= (\tfrac{\sin x}{\cos x})' \\ &= \tfrac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \tfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tfrac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

■

Eksempel 2.5 La f være gitt ved

$$f(x) = (\ln \sqrt{x})^3, \quad x > 0.$$

Vi vil derivere f, og ser på to alternative utregninger:
Alternativ 1: Funksjonen f er satt sammen av tre funksjoner; tredjegradsfunksjonen x^3, logaritmefunksjonen $\ln x$ og rotfunksjonen $\sqrt{x}$, der $\ln \sqrt{x}$ er kjernen i tredjegradsfunksjonen og $\sqrt{x}$ er kjernen i logaritmefunksjonen. Hvis vi skriver

$$\begin{aligned}r(x) &= x^3 \\ s(x) &= \ln x \\ t(x) &= \sqrt{x},\end{aligned}$$

er dermed

$$s(t(x)) = \ln \sqrt{x}$$

og

$$r(s(t(x))) = (\ln \sqrt{x})^3 = f(x)$$

(vær sikker på dette!). Ved bl.a. å bruke kjerneregelen to ganger får vi derfor

$$\begin{aligned}
f'(x) &= r'(s(t(x))) \cdot (s(t(x)))' \\
&= r'(s(t(x))) \cdot s'(t(x)) \cdot t'(x) \\
&= 3(\ln\sqrt{x})^2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \tfrac{3}{2x}(\ln\sqrt{x})^2 \\
&= \tfrac{3}{2x}(\tfrac{1}{2}\ln x)^2 \\
&= \tfrac{3}{8x}\ln^2 x.
\end{aligned}$$

Alternativ 2: Ved å bruke logaritmeregler først, trenger vi kun å bruke kjerneregelen én gang:

$$f(x) = (\ln\sqrt{x})^3 = (\frac{1}{2}\ln x)^3 = \frac{1}{8}\ln^3 x$$

så

$$f'(x) = \frac{3}{8}(\ln^2 x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{8x}\ln^2 x.$$

■

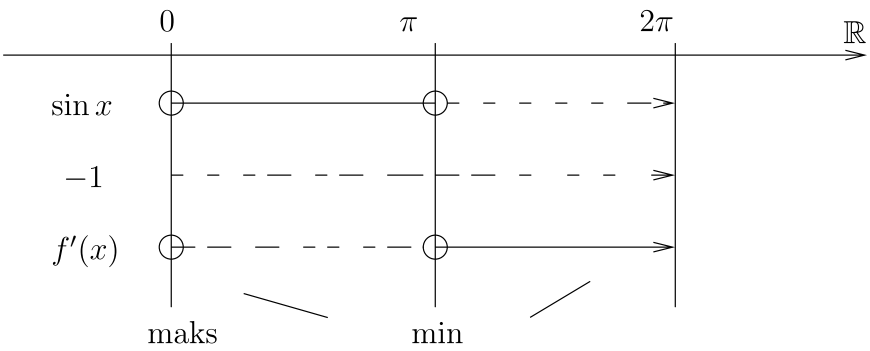
Når $f'(a) = 0$ i et punkt $x = a$ vil det si at funksjonen ikke forandres akkurat i dette punktet, som vil si at tangenten har stigningstall lik 0, og at f dermed har et mulig topp- eller bunnpunkt her. Vi minner kort om drøfting av den deriverte ved å drøfte et trigonometrisk uttrykk:

Eksempel 2.6 Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -1 + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi)$$

er (en del av) en harmonisk svingning med middelverdi -1 og amplityde 1, dvs. den har maksverdi 0 og minverdi -2. I hvilke punkter har f maks og min?

Vi har at $f'(x) = -\sin x$, og drøfter denne funksjonen:



Siden f' (og dermed forandringen) er negativ på intervallet $(0, \pi)$ og siden $x = 0$ er et *endepunkt* på intervallet, gir $x = 0$ et maksimumspunkt. Siden f' skifter fra å være negativ til å være positiv i $x = \pi$, er dette et minimumspunkt.

Vi har altså maks (lik 0) for $x = 0$ og min (lik -2) for $x = \pi$. ■

Vi vet at når $f'(x)$ er positiv har f positiv forandring, dvs. f vokser, og når $f'(x)$ er negativ, avtar f. Vi snakker gjerne om at f har positiv henholdsvis negativ vekst.

Spesielt når $f(t)$ er et antall individer i en populasjon (som gjerne kan være kronestykker) ved tiden t kaller vi $f'(t)$ *vekstraten* til populasjonen. Denne størrelsen sier hvor fort populasjonen vokser eller avtar.

Størrelsen

$$\frac{f'(t)}{f(t)}$$

kalles den *relative vekstraten* (også kalt den *spesifikke* vekstraten) til populasjonen. Denne størrelsen sier noe om hvor mye hvert individ bidrar til (den positive eller negative) veksten.

Vi merker oss spesielt at populasjoner der antallet er gitt ved en eksponentialfunksjon

$$f(t) = Ce^{rt}$$

har vi

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = r,$$

dvs. slike populasjoner har konstant relativ vekstrate (siden $f'(t) \propto f(t)$ for alle t). Husk at for slike populasjoner har vi også begrepene *doblingstid* for positiv vekst og *halveringstid* for negativ vekst (altså den tiden det tar for populasjonen å doble, henholdsvis halvere, seg).

Eksempel 2.7 En populasjon har konstant relativ vekstrate $r = 20$ pr år. Ved tidspunktet t_0 er det 800 individer i populasjonen. Vekstraten til populasjonen ved tidspunktet t_0 er da 16000. ■

Det er også klart at forandringer kan forandre seg. Det mest nærliggende eksemplet på dette er hvis $f(t)$ er funksjonen som måler en tilbakelagt *strekning* ved tiden t. Da er $f'(t)$, forandringen av strekningen, det vi kaller *hastighet*. Hvis hastigheten er konstant har den altså null forandring, men hvis vi derimot ikke har konstant hastighet, forandres hastigheten, og vi har en forandring av forandringen. Forandring av hastighet er det vi kaller *akselerasjon*.

Matematisk tar vi hånd om forandringer av forandringer osv. ved å derivere den deriverte, og eventuelt fortsette å derivere. Dette gir mye matematikk som vi kan bruke til å løse mange problemer. Hvis vi kjenner sammenhenger mellom alle ulike forandringer for et fenomen, kan vi kanskje si noe om fenomenet. Vi har nå endelig kommet til punket der vi kan introdusere difflikninger:

2.2 Differensiallikninger

Definisjon 2.8 *En differensiallikning (forkortet difflikning) er en likning der en funksjon og dens deriverte funksjoner inngår.*

Bemerkning 2.9 Vanligvis er vi interesserte i å løse difflikningen på et gitt intervall. Dersom intervallet ikke er oppgitt er det underforstått at vi skal velge det 'største' intervallet der likningen gir mening. ■

La oss bli enige om litt notasjon: Vi skal studere likninger der den ukjente er en funksjon. I dette kapitlet vil vi bruke y for denne ukjente funksjonen med variabel x. Etterhvert vil t (for tid) ofte brukes for variabelen.

For funksjonens deriverte vil vi veksle mellom notasjonen $\frac{dy}{dx}$ og $y'(x)$ (forkortet y') for den førstederiverte, men kun bruke notasjonen $y''(x)$ (forkortet y'') for den andrederiverte der $y''(x) = (y'(x))'$ (andre notasjoner er for eksempel $\frac{d^2y}{dx^2}$). Den tredjederiverte $(y'')'$ skrives $y^{(3)}$ osv.

Eksempel 2.10 Likningene $y^{(3)} = y$ og $y' + e^x y = 5$ er eksempler på difflikninger som gjelder på hele $\mathbb{R}$.

Likningen $y' = \frac{3y}{2x}$ er også en difflikning, men uttrykket $\frac{1}{2x}$ er ikke definert for $x = 0$, så for denne likningen kan man for eksempel bestemme seg for at likningen skal gjelde på intervallet $(0, \infty)$. ■

Ordenen til en difflikning er ordenen til den høyeste deriverte av den ukjente funksjonen som forekommer i likningen. Så i Eksempel 2.10 er likningene $y' = \frac{3y}{2x}$ og $y' + e^x y = 5$ første ordens difflikninger, mens $y^{(3)} = y$ er en tredje ordens difflikning.

Definisjon 2.11 *En løsning y av en n-te ordens difflikning på et intervall er en funksjon definert på intervallet som sammen med sine deriverte (som dermed må eksistere, dvs. y må være deriverbar n ganger i intervallet) tilfredsstiller sammenhengen gitt av likningen på det angitte intervallet.*

Bemerkning 2.12 I selve likningen og regningene bruker vi altså bare y, men når vi presenterer løsningene, vil vi ha regnet oss frem til en formel for y, og skriver da

$$y(x) = \dots$$

■

Eksempel 2.13 Funksjonen y gitt ved $y(x) = 102e^x$ er en løsning av difflikningen $y^{(3)} = y$ siden $y^{(3)} = 102e^x = y$, og y er tre ganger deriverbar. Et annet eksempel på løsning av likningen $y^{(3)} = y$ er $y(x) = 5e^x - 3$ (sjekk!). ■

Eksempel 2.14 Funksjonen y gitt ved $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ er en løsning av difflikningen $y' = \frac{3y}{2x}$ for $x \in (0, \infty)$ siden

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2x} = \frac{3y}{2x}.$$

Videre er for eksempel $y(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$ også en løsning av den samme likningen (sjekk!). ■

Å løse en difflikning vil si å finne alle funksjoner som passer inn i likningen. Generelle difflikninger er meget vanskelige å løse, og her er det stor forskningsaktivitet. I MAT1001 skal vi ta for oss tre typer difflikninger:

- første ordens lineære difflikninger
- separable difflikninger (er første ordens)
- andre ordens lineære homogene difflikninger med konstante koeffisienter

Legg merke til at de fleste av ordene her (unntatt *separabel*) kjenner vi igjen fra de ulike typene *differens*likninger vi studerer i Kompendium 2. Forskjellen er altså at **for differenslikninger er løsningene tallfølger (diskrete funksjoner), mens for difflikninger er løsningene (kontinuerlige) funksjoner.**

2.3 Antiderivasjon

Et av de enkleste eksemplene på en difflikning er likningen

$$y' = f(x),$$

der løsningene er funksjoner y slik at y' er en gitt funksjon f. For eksempel

$$y' = 3x.$$

For å løse slike likninger, må vi dermed 'derivere baklengs', en operasjon som kalles *antiderivering*. Dette er en helt sentral operasjon for å løse difflikninger, og vi skal derfor se litt nærmere på endel antideriveringsteknikker.

Definisjon 2.15 *En antiderivert til en funksjon f (på et intervall I) er en* *funksjon F (som er deriverbar på I) slik at*

$$F'(x) = f(x) \quad (\textit{for alle } x \in I).$$

Vi vet at $C' = 0$ for en konstant C. Videre er det kun konstante funksjoner som har null forandring, dvs. at løsningene til difflikningen

$$y' = 0 \tag{2.3}$$

er

$$y(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi nå har to antideriverte funksjoner F og G til en funksjon f, er

$$F'(x) = G'(x)$$

(siden begge er lik $f(x)$), dvs.

$$F'(x) - G'(x) = 0,$$

men siden $F'(x) - G'(x) = (F(x) - G(x))'$, har vi difflikningen

$$(F(x) - G(x))' = 0$$

(der $F - G$ er den ukjente funksjonen), som er på formen (2.3) og dermed har løsninger

$$F(x) - G(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Differansen mellom to antideriverte funksjoner til f er altså konstant. Dette betyr at

$$F(x) = G(x) + C,$$

og dermed får vi uendelig mange antideriverte funksjoner til f ved å finne én antiderivert F og legge til en vilkårlig konstant.

Eksempel 2.16 Siden

$$(\frac{3}{2}x^2)' = 3x,$$

er $F(x) = \frac{3}{2}x^2$ en antiderivert til $f(x) = 3x$. Funksjonen G gitt ved

$$G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5$$

er også en antiderivert til $f(x) = 3x$ siden vi også har at

$$(\frac{3}{2}x^2 + 5)' = 3x.$$

Tallet 5 kan erstattes av et hvilket som helst (reelt) tall, og vi får at alle de antideriverte til $f(x)$ kan skrives som

$$\frac{3}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Definisjon 2.17 *Den generelle antideriverte til en funksjon f er funksjonene gitt ved*

$$F(x) + C$$

der $C \in \mathbb{R}$ og F er en antiderivert til f. Hvis slike antideriverte fins, skriver vi

$$\int f(x)\,dx$$

for den generelle antideriverte til f som leses 'det ubestemte integralet av f med hensyn på x'. Vi har altså at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Bemerkning 2.18

- Antiderivering er (viser seg å være) det samme som *integrering*, og dermed vil også ordet integrering dukke opp endel, men for det meste vil vi bruke ordet antiderivering.
- Konstanten C kalles gjerne en *integrasjonskonstant*.

- Symbolet dx kalles *differensialet* til x. Dette symbolet angir at vi skal antiderivere/integrere med hensyn på variabelen x.

■

Eksempel 2.19 Det ubestemte integralet $\int dx$ er

$$\int dx = \int 1\,dx = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

siden $(x + C)' = 1$.

Hvis vi integrerer med hensyn på en annen variabel t får vi altså

$$\int dt = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Vi har altså:

$$\boxed{\int f'(x)\ dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Bemerkning 2.20

- Det kan vises at alle kontinuerlige funksjoner har en antiderivert. Men i en del tilfeller kan ikke en antiderivert angis som en 'elementær' funksjon, dvs. en lineær kombinasjon av de vanlige funksjonene. Et eksempel er funksjoen $f(x) = e^{x^2}$. Den antideriverte av f, som vi ikke kan angi på en elementær måte, er viktig i mange anvendelser.

- Alle regler og teknikker vi skal bruke krever at funksjonene vi betrakter er kontinuerlige, og hvis den deriverte av en funksjon f er involvert, kreves det også at f er deriverbar. Vi merker oss at de funksjonene vi skal regne med vil tilfredsstille disse kravene.

■

Kort oppsummering av notasjon:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{betyr det samme som} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Siden vi bedriver 'baklengs derivering', finner vi automatisk den generelle antideriverte til mange funksjoner ved å bruke listen over kjente deriverte funksjoner baklengs:

- $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \quad a > 0$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

der C er en integrajonskonstant, $C \in \mathbb{R}$.

Vi får også endel regneregler for antiderivering ved å bruke regneregler for derivasjon baklengs:

- Antiderivere en funksjon multiplisert med en konstant $a \in \mathbb{R}$:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

- Antiderivere en sum:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- Antiderivere en differanse:

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Ved å bruke kjerneregelen baklengs får vi for det første to nyttige regler:

La F være en antiderivert til f, dvs. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Da er

- $$\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a} + C, \quad a \neq 0 \tag{2.4}$$

- $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \tag{2.5}$$

der C er en integrasjonskonstant.

Disse kan sjekkes ved å derivere ved hjelp av kjerneregelen (gjør det!).

Eksempel 2.21 Vi har

$$\int \sin(3x)\,dx = -\frac{\cos(3x)}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ved (2.4) og ser at dette stemmer ved å derivere:

$$(-\frac{\cos 3x}{3} + C)' = -\frac{1}{3}(-\sin 3x) \cdot 3 = \sin 3x.$$

Videre har vi

$$\int e^{x^2} 2x\,dx = e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ved (2.5) siden $(x^2)' = 2x$. ∎

Reglene (2.4) og (2.5) er spesialtilfeller av antideriveringsteknikken kalt **substitusjon**. Denne teknikken bruker kjerneregelen baklengs, og går ut på å 'gjenkjenne en kjerne'. Noen ganger må vi multiplisere med en konstant for å gjenkjenne en kjerne. Vi viser teknikken på noen eksempler:

Eksempel 2.22 Vi vil antiderivere $x\cos(x^2)$. Da ser vi at kjernen i cos-funksjonen er x^2, som har derivert $2x$. I uttrykket vi skal antiderivere har vi imidlertid ikke $2x$, men kun x. Dette ordner vi ved å ta med en faktor $\frac{1}{2}$ i regningene. Vi påstår at

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

der C er en integrasjonskonstant. Ved å derivere kan vi sjekke at dette er riktig. For å komme frem til dette svaret fører vi gjerne regningene slik:

$$\begin{aligned} & \int x\cos(x^2)\,dx \\ = & \int \tfrac{1}{2}\cos(u)\,du \\ = & \tfrac{1}{2}\sin(u) + C \\ = & \tfrac{1}{2}\sin(x^2) + C. \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} & \text{Substitusjon :} \\ & x^2 = u \\ & 2x\,dx = du \\ & x\,dx = \tfrac{1}{2}du \end{aligned}}$$

Forklaring: Vi lager en substitusjonsboks, der vi har gjenkjent en kjerne, og ofte er det denne kjernen **vi substituerer for å få et enklere uttrykk å antiderivere**. I denne oppgaven bytter vi dermed ut kjernen x^2 med u. Det gir likningen $x^2 = u$.

Siden vår nye variabel nå er u, må vi bytte ut alle uttrykk i x med uttrykk i u. For å regne ut hva uttrykket vi skal antiderivere blir uttrykt i u tar vi utgangspunkt i likningen $x^2 = u$ og deriverer på begge sider med hensyn på x. Det gir

$$2x = \frac{du}{dx}$$

der vi bruker notasjonen $\frac{du}{dx}$ for $u'(x)$. Ved å gange med dx på begge sider (som ikke er helt stuerent, men som fungerer som en teknikk), får vi

$$2x\,dx = du.$$

Siden vi har $x\,dx$ i vårt uttrykk, kan vi dermed bytte det ut med $\frac{1}{2}du$ ved å dele på 2 i likningen ovenfor, og vi får regningen som står ved siden av substitusjonsboksen (der vi må huske å substituere tilbake til slutt). ■

Eksempel 2.23 Vi antideriverer $\tan x$ med hensyn på x:

$$
\begin{aligned}
& \int \tan x \, dx \\
= & \int \tfrac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
= & \int -\tfrac{1}{u} \, du \\
= & -\ln|u| + C \\
= & -\ln|\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\qquad
\boxed{\begin{array}{l}
\text{Substitusjon :} \\
\cos x = u \\
-\sin x \, dx = du \\
\sin x \, dx = -du
\end{array}}
$$

■

Eksempel 2.24 For å antiderivere uttrykket $5x^2e^{x^3}$ får vi følgende utregning:

$$
\begin{aligned}
& \int 5x^2e^{x^3} \, dx \\
= & \int \tfrac{5}{3}e^u \, du \\
= & \tfrac{5}{3}e^u + C \\
= & \tfrac{5}{3}e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\qquad
\boxed{\begin{array}{l}
\text{Substitusjon :} \\
x^3 = u \\
3x^2 \, dx = du \\
x^2 \, dx = \tfrac{1}{3} \, du \\
5x^2 \, dx = \tfrac{5}{3} \, du
\end{array}}
$$

■

Vi vil også ha bruk for å antiderivere noen rasjonale funksjoner. For å klare dette merker vi oss først at for $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, er

$$\boxed{\int \frac{a}{bx - c} \, dx = \frac{a}{b} \ln|bx - c| + C.} \tag{2.6}$$

(sjekk ved å deriverer høyresiden!). For å komme frem til (2.6), substituerer vi $\boxed{bx - c = u}$, som gir $dx = \frac{1}{b} \, du$ (fullfør regningen!).

Ved hjelp av (2.6) og en spesiell oppspaltingsteknikk, kalt **delbrøksoppspalting**, kan vi antiderivere endel spesielle rasjonale uttrykk som ofte dukker opp i forbindelse med difflikninger:

Eksempel 2.25 Vi vil antiderivere uttrykket

$$\frac{1}{x(x-1)}.$$

Da får vi følgende regning:

$$\begin{aligned} & \int \tfrac{1}{x(x-1)}\,dx \\ = \; & \int -\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x-1}\,dx \\ = \; & -\ln|x| + \ln|x-1| + C \\ = \; & \ln|\tfrac{x-1}{x}| + C. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Oppspalting :} \\ \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \\ 1 = A(x-1) + Bx = -A + (A+B)x \\ \begin{cases} -A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases} \\ \frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{array}}$$

Forklaring: Siden nevneren i uttrykket vi skal antiderivere er et produkt, spalter vi opp uttrykket ved å skrive det som en sum av to uttrykk der nevnerne er lineære uttrykk (faktorene i produktet). Det gir utregningen i oppspaltingsboksen. Vi setter dette inn i regningen på venstre side av boksen, og bruker (2.6). Regneregelen $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ gir den siste likheten. ■

Eksempel 2.26 Vi vil antiderivere det rasjonale uttrykket $\frac{5}{3x(3-2x)}$:

$$\begin{aligned} & \int \tfrac{5}{3x(3-2x)}\,dx \\ = \; & \tfrac{5}{3} \int \tfrac{1}{x(3-2x)}\,dx \\ = \; & \tfrac{5}{3} \int \tfrac{\frac{1}{3}}{x} + \tfrac{\frac{2}{3}}{3-2x}\,dx \\ = \; & \tfrac{5}{9} \int \tfrac{1}{x} + \tfrac{2}{3-2x}\,dx \\ = \; & \tfrac{5}{9}(\ln|x| + \int \tfrac{2}{3-2x}\,dx) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Oppspalting :} \\ \frac{1}{x(3-2x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-2x} \\ 1 = 3A - 2Ax + Bx \\ \begin{cases} 3A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases} \\ \frac{1}{x(3-2x)} = \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{3-2x} \end{array}}$$

Mellomregning: For å antiderivere $\frac{2}{3-2x}$ bruker vi substitusjon (eller bruk (2.6), og husk negativt fortegn pga. kjernen):

$$\begin{aligned} & \int \tfrac{2}{3-2x}\,dx \\ = \; & \int -\tfrac{1}{u}\,du \\ = \; & -\ln|u| + C \\ = \; & -\ln|3-2x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Substitusjon :} \\ 3 - 2x = u \\ -2\,dx = du \\ 2\,dx = -du \end{array}}$$

Vi får dermed

$$\int \frac{5}{3x(3-2x)}\,dx = \frac{5}{9}(\ln|x| - \ln|3-2x|) + C = \frac{5}{9}\ln\left|\frac{x}{3-2x}\right| + C$$

der alle integrasjonskonstantene er slått sammen til C. ■

Vi tar med en antideriveringsteknikk til, kalt **delvis integrasjon**. Her bruker vi produktregelen for derivasjon baklengs. Hvis vi skriver produktregelen for funksjonene u og v, har vi

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

På kortform (setter $u = u(x)$ og $v = v(x)$):

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

Hvis vi antideriverer med hensyn på x på begge sider får vi

$$uv = \int uv'\,dx + \int u'v\,dx. \tag{2.7}$$

Dette gir **formelen for delvis integrasjon** (der vi flytter over det ene leddet i (2.7)):

$$\boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.} \tag{2.8}$$

Dette kan vi bruke til å antiderivere uttrykk ved å se om faktorer i uttrykket kan kalles u og v' (venstresiden i (2.8)) og gi et uttrykk $u'v$ (som forekommer på høyresiden i formelen (2.8)) som er enklere å antiderivere.

Eksempel 2.27 Vi vil antiderivere uttrykket xe^x. Det gir følgende regning:

$$\begin{aligned} & \int xe^x\,dx \\ =\; & xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx \\ =\; & xe^x - e^x + C. \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{Delvis :} & \\ u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}}$$

Forklaring: Vi må først bestemme oss for hvilken faktor som skal være u og hvilken som skal være v'. Det er ikke alltid opplagt, men poenget er å velge dem slik at $u'v$ blir enklere å derivere (vanligvis). Her velger vi $u = x$ og $v' = e^x$, som gir $u'v = e^x$. Valget av u og v' holder vi styr på i delvisboksen. Vi setter deretter dette inn i formelen (2.8) og antideriverer ferdig. ■

Noen ganger må man 'delvis integrere' flere ganger. Dessuten: husk å velge u og v' med omhu!

Eksempel 2.28 Vi vil antiderivere $x^2(\ln x)^2$:

$$\begin{aligned} & \int x^2(\ln x)^2\,dx \\ = \; & \tfrac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \tfrac{2}{3}\int x^2 \ln x\,dx \end{aligned}$$

Delvis :	
$u = (\ln x)^2$	$u' = \frac{2\ln x}{x}$
$v' = x^2$	$v = \frac{1}{3}x^3$

Mellomregning:

$$\begin{aligned} & \int x^2 \ln x\,dx \\ = \; & \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \int \tfrac{1}{3}x^2\,dx \\ = \; & \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Delvis :	
$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = x^2$	$v = \frac{1}{3}x^3$

Vi får dermed:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$$

der integrasjonskonstantene er slått sammen til en 'ny' C. ■

Oppsummering av teknikker: Når man skal antiderivere et uttrykk er det verdt å merke seg at

- det fins ikke én oppskrift man kan følge (slik det gjør for derivering), men et par tips kan vi gi:
  - antiderivere et rasjonal uttrykk: tenk først delbrøksoppspalting
  - antiderivere et produkt: tenk først delvis integrasjon
  - hvis du kan gjenkjenne en 'kjerne': tenk først substitusjon
- antiderivering er en kunst, og det kan meget godt hende at teknikkene man kan må kombineres!

Vi har nå uansett innført de teknikkene vi trenger for å kunne løse endel typer difflikninger.

2.4 Nå skal du kunne

- gi en presis definisjon og forklaring på begrepet den deriverte til en funksjon
- derivere alle typer funksjoner vi møtte i Kapittel 1, og finne viktig oppførsel som maks og min og hvor disse funksjonene vokser og avtar
- begrepene tilknyttet positiv og negativ vekst (vekstrate, relativ vekstrate, doblings- og halveringstid)
- definisjonen av en n-te ordens difflikning og løsning av en slik likning, herunder gi eksempler på difflikninger med tilhørende løsninger
- definisjonene av en antiderivert, den generelle antideriverte og det ubestemte integralet til en funksjon
- vite hvordan og hvorfor antideriveringsteknikkene substitusjon, delbrøksoppspalting og delvis integrasjon fungerer og dermed bruke dem til å antiderivere endel uttrykk
- tre inn i difflikningenes verden med stor selvtillit