MAT1010 V09 - Fasit - Oblig1 / Oppagve 1.

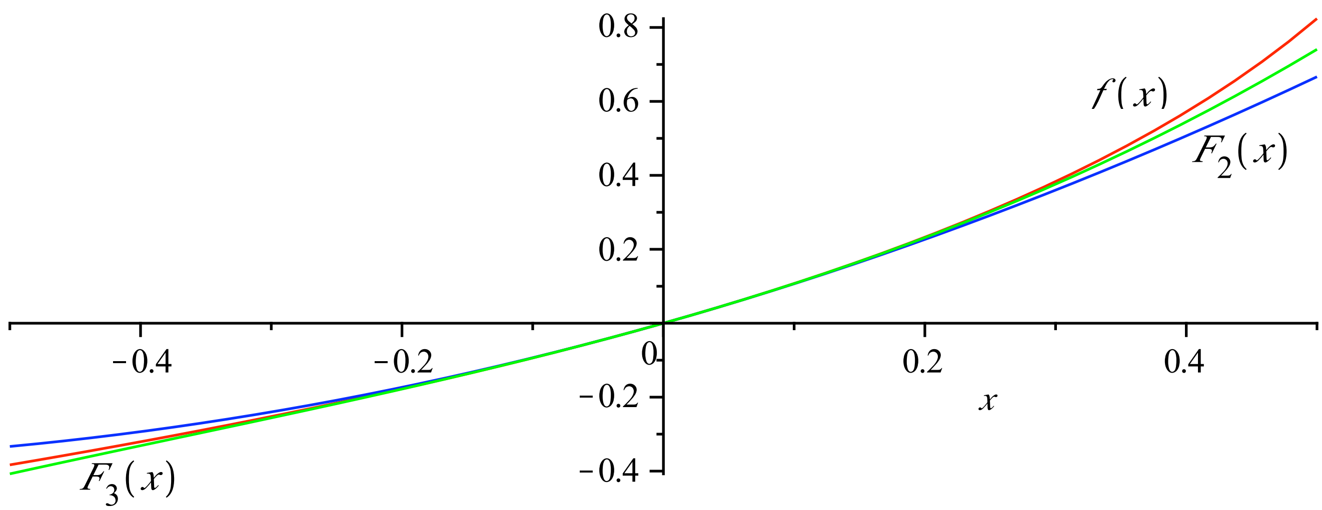
Vi setter

$f := x \to -\frac{3}{4}\ln\left(1-\frac{4}{3}x\right)$

$$x \to -\frac{3}{4}\ln\left(1-\frac{4}{3}x\right) \qquad \textbf{(1)}$$

a) Utregning gir at $F_2(x) = x + \frac{2}{3}x^2$ og $F_3(x) = x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{27}x^3$.

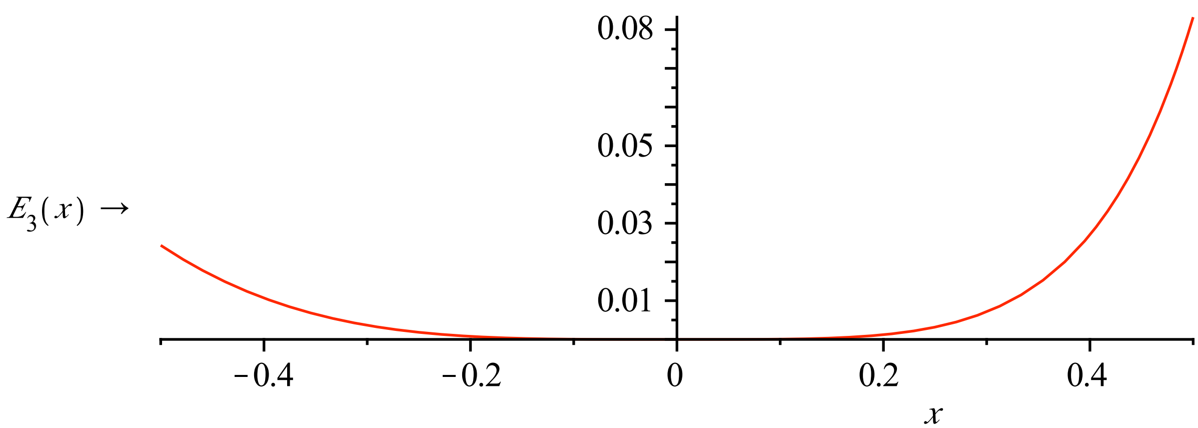
b) Grafene til $f(x)$, $F_2(x) = x + \frac{2}{3}x^2$, $F_3(x) = x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{27}x^3$ over $[-0.5, 0.5]$ ser slik ut



c) Vi setter $E_3 := x \to f(x) - \left(x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{27}x^3\right)$

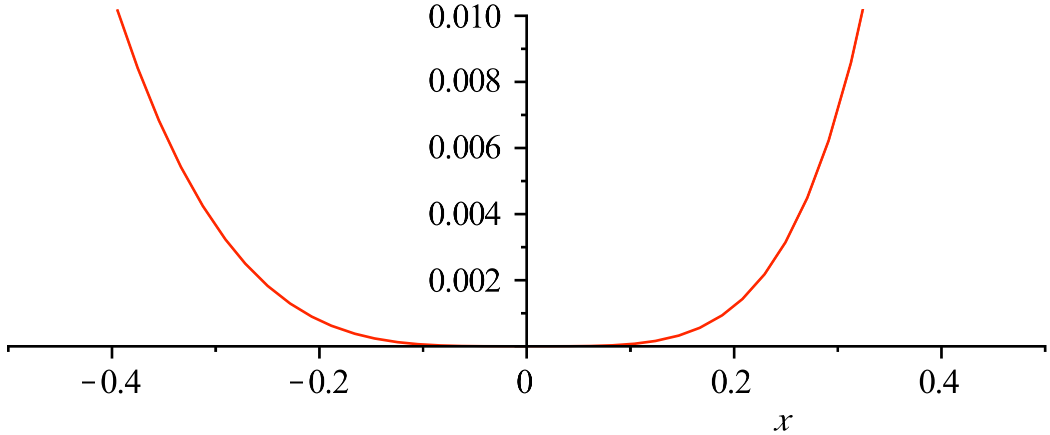
$$x \to f(x) - x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{16}{27}x^3 \qquad \textbf{(2)}$$

og får :



Ved å begrense y-verdiene til intervallet $[0, 0.01]$ (og x-verdiene til $[-0.5, 0.5]$) får vi

$E_3(x) \rightarrow$



Ved å klikke på grafen finner vi ut at det ser ut som $|E_3(x)| \le 0.01$ når $|x| \le 0.32$, så vi kan velge $d = 0.32$.

Kommentar: Vi finner faktisk at det ser ut som $|E_3(x)| \le 0.01$ når $-0.39 \le x \le 0.32$. Hvis vi ønsker å vite mere presist hvor ulikheten holder, kan vi be Maple løse likningen $E_3(x) = 0.01$ numerisk : det gir

$$E_3(x) = 0.01 \xrightarrow{\text{solve}} 0.3233919435$$

For å finne den negative verdien kan vi Maple løse denne likingen numerisk, men oppgi f.eks. - 0.4 som en verdi som vi tror ligger nært; vi får da

$$E_3(x) = 0.01 \xrightarrow{\text{solve}} -0.3930040986$$

d) Jukes-Cantor avstanden er i dette tilfellet gitt ved

$$A = -\frac{3}{4}\ln\left(1 - \frac{4}{3}\,0.3\right) = f(0.3)\,.$$

Fra de forrige punktene vet vi at da er $A = f(0.3) \approx F_3(0.3)$ (med en feil mindre enn 0.01).

$$\text{Vi får at } A \approx F_3(0.3) = \left. x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{27}x^3 \right|_{x=0.3} = 0.3760000000\,.$$

Ber vi i stedet Maple approksimere verdien av A får vi

$$A = -\frac{3}{4}\ln\left(1 - \frac{4}{3}\cdot 0.3\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.38312$$

(og vi ser at det stemmer at feilen er mindre enn 0.01).