Kapittel 3

Mer om egenverdier og egenvektorer

I neste kapittel skal vi lære å løse *systemer* av difflikninger. Da vil vi trenge egenverdier og egenvektorer, og selv om vi skal løse reelle problemer, vil vi trenge å jobbe i den komplekse verdenen underveis.

3.1 Komplekse n-tupler og vektorer

Vi husker at et komplekst tall z er et tall på formen $z = a+ib$, der $a, b \in \mathbb{R}$ og $i^2 = -1$. Vi regner med disse tallene akkurat som reelle tall, bare vi husker at $i^2 = -1$.

Definisjon 3.1 *Et komplekst tuppel av lengde n, eller et komplekst n-tuppel, skrevet $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, er n komplekse tall ordnet i en bestemt rekkefølge.*

Som for (reelle) tupler (se f.eks. Seksjon 1.2 i *Matematisk verktøykasse*), kalles de komplekse tallene z_i som forekommer i tuppelet, *komponentene* til tuppelet. To komplekse n-tupler er like hvis de er komponentvis like, og vi kan ikke sammenligne komplekse tupler av ulik lengde.

Mengden av alle komplekse n-tupler betegnes med $\mathbb{C}^n$, det n-dimensjonale komplekse rommet:

$$\mathbb{C}^n = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \colon z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}$$

Vi definerer addisjon og multiplikasjon med en skalar for komplekse tupler komponentvis, dvs. helt tilsvarende som for reelle tupler. Legg merke til at *skalarene nå kan være komplekse tall*:

Definisjon 3.2 *La* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *og* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *være to komplekse n-tupler, og la* $c \in \mathbb{C}$. *Vi definerer*

$$\begin{aligned}\mathbf{z} + \mathbf{w} &= (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_n + w_n);\\ c\mathbf{z} &= (cz_1, cz_2, \ldots, cz_n).\end{aligned}$$

Vi kan ikke addere komplekse tupler av ulik lengde.

Vi kan dermed regne ut lineære kombinasjoner av komplekse tupler (av lik lengde):

Eksempel 3.3 La $\mathbf{z} = (1, 1+i, i)$ og $\mathbf{w} = (2, 0, 3-i)$. Vi vil finne den lineære kombinasjonen $c\mathbf{z} + d\mathbf{w}$ for $c = 2$ og $d = \frac{1}{2} - 3i$ (husk $i^2 = -1$). Vi får

$$\begin{aligned}2\mathbf{z} + (\tfrac{1}{2} - 3i)\mathbf{w} &= 2(1, 1+i, i) + (\tfrac{1}{2} - 3i)(2, 0, 3-i)\\ &= (2, 2+2i, 2i) + (1 - 6i, 0, \tfrac{3}{2} + i)\\ &= (3 - 6i, 2 + 2i, -\tfrac{3}{2} + 3i),\end{aligned}$$

som er et nytt komplekst 3-tuppel. ■

Tilsvarende som for reelle tupler, vil vi tenke på komplekse n-tupler som komplekse vektorer i $\mathbb{C}^n$, og siden vi skal multiplisere dem med matriser fra venstre, bestemmer vi oss for å skrive komplekse n-tupler som komplekse *kolonne*vektorer, dvs.

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Forskjellen fra reelle tupler, er at komponentene z_i nå har en realdel og en imaginærdel. Dermed vil vektoren også ha det. Realdelen og imaginærdelen til en kompleks vektor er de to vektorene som har komponenter bestående av henholdsvis realdelene og imaginærdelene til komponentene til vektoren:

Definisjon 3.4 *La* $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ *være en kompleks vektor med komponenter* $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, \ldots, z_n = a_n + ib_n$. *Realdelen og imaginærdelen til* $\mathbf{z}$ *er vektorene* $\operatorname{Re}\mathbf{z}$ *og* $\operatorname{Im}\mathbf{z}$ *gitt ved*

$$\operatorname{Re}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z_1) \\ \operatorname{Re}(z_2) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(z_n) \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Im}(z_1) \\ \operatorname{Im}(z_2) \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(z_n) \end{bmatrix}$$

slik at $\mathbf{z}$ *kan skrives*

$$\mathbf{z} = \operatorname{Re}(\mathbf{z}) + i\operatorname{Im}(\mathbf{z}).$$

Vi kan også definere konjugasjon for komplekse vektorer.

Definisjon 3.5 *La* $\mathbf{z} = \operatorname{Re}(\mathbf{z}) + i\operatorname{Im}(\mathbf{z})$ *være en kompleks vektor. Vektoren* $\overline{\mathbf{z}} = \operatorname{Re}(\mathbf{z}) - i\operatorname{Im}(\mathbf{z})$ *kalles den konjugerte vektoren til* $\mathbf{z}$.
Merk at hvis $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, *så blir da* $\overline{\mathbf{z}} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n})$.

Vi får dermed den konjugerte til en kompleks vektor ved å konjugere komponentvis.

Eksempel 3.6 Vektoren $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2-i \\ 4 \\ -i \end{bmatrix}$ kan skrives som

$$\begin{bmatrix} 2-i \\ 4 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

og vi har

$$\mathrm{Re}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Den konjugerte vektoren til $\mathbf{z}$ er

$$\overline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 4 \\ i \end{bmatrix}.$$

■

Vi skal snart jobbe med komplekse vektorer, mens matrisene vi skal studere vil være reelle. Det er imidlertid ingenting i veien for å ha *komplekse matriser* også, dvs. at komponentene i matrisen kan være komplekse tall, og siden vi vil trenge en regneregel der konjugasjon av en matrise forekommer, tar vi med følgende:

Definisjon 3.7 *La A være en kompleks matrise. Den konjugerte matrisen til A, skrevet $\overline{A}$, er matrisen der komponentene er de konjugerte til komponentene til A.*

Konjugasjon for komplekse vektorer, som er en $n \times 1$-matrise, er dermed et spesialtilfelle av denne definisjonen.

Eksempel 3.8

$$\overline{\begin{bmatrix} 2-i & -3 \\ 4i & 3+8i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \overline{2-i} & \overline{-3} \\ \overline{4i} & \overline{3+8i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & -3 \\ -4i & 3-8i \end{bmatrix}$$

■

Vi har følgende regneregler for kompleks konjugasjon av vektorer og matriser:

Teorem 3.9 *La A og B være komplekse matriser og $\mathbf{z}$ en kompleks vektor slik at produktene nedenfor har mening. La $c \in \mathbb{C}$. Da har vi følgende regneregler*

- $\overline{cA} = \overline{c} \cdot \overline{A}$
- $\overline{c\mathbf{z}} = \overline{c} \cdot \overline{\mathbf{z}}$
- $\overline{A\mathbf{z}} = \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{z}}$
- $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

3.2 Algebraens fundamentalteorem

I denne seksjonen skal vi ta med et resultat som er, som tittelen sier, fundamentalt for algebra. Ordet algebra stammer fra det arabiske *al-jabr* som betyr 'å sette sammen'. Mens aritmetikken dreier seg om tallregning, handler algebra om å regne med symboler, og teorien utviklet seg via jakten på å løse likninger.

Vi vil trenge å vite litt om teorien for løsning av algebraiske likninger:

Definisjon 3.10 *Et n-te grads polynom $P(z)$ i variabelen z,dvs.*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$$

der $c_n \neq 0$, kalles et reelt polynom hvis koeffisientene $c_0, c_1 \ldots, c_n$ er reelle tall, og et komplekst polynom hvis koeffisientene er komplekse tall.
En algebraisk n-te grads likning i variabelen z er en likning på formen

$$P(z) = 0$$

(der $P(z)$ er et n-te grads polynom).

Bemerkning 3.11 Vi snakker ofte bare om en 'likning' i betydningen en algebraisk likning, dvs. vi dropper ofte ordet 'algebraisk'.

Husk også at reelle tall kan ses på som komplekse tall der imaginærdelen er lik 0, så begrepet komplekst polynom omfatter også reelle polynomer. ■

Vi kjenner allerede meget godt til andregradslikninger $az^2+bz+c = 0$, og vi innførte komplekse tall nettopp for å kunne løse alle slike likninger. Men komplekse tall viser seg å kunne brukes til mye mer enn bare det. De gjør oss nemlig i stand til å løse *alle* algebraiske likninger, altså av hvilken som helst grad! Det er dette resultatet som kalles *algebraens fundamentalteorem*:

Teorem 3.12 *(Algebraens fundamentalteorem) La*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$$

være et komplekst n-te grads polynom der $n \geq 1$ og $c_n \neq 0$. Da finnes det komplekse tall $w_1, w_2, \ldots w_n$ slik at

$$P(z) = c_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n) \tag{3.1}$$

for alle komplekse tall z. Bortsett fra rekkefølgen er faktorene $(z - w_1), (z - w_2), \ldots, (z - w_n)$ entydig bestemt.

Teorem 3.12 ble bevist av Carl Friedrich Gauss i 1799, men beviset er såpass vanskelig at mange bruker dette resultatet uten at de ser et bevis for det. Vi skal ikke bevise algebraens fundamentalteorem i dette kurset.

Her er imidlertid noen **viktige** bemerkninger til teoremet:

Bemerkning 3.13 Første del av teoremet gir at $w_1, w_2, \ldots, w_n$ er løsninger til likningen $P(z) = 0$. Disse kalles også røttene til polynomet $P(z)$. (Dette er 'eksistensdelen' av resultatet.)

Legg merke til at resultatet sier ingen ting om hvordan vi finner disse løsningene, dvs. hvordan røttene $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ser ut!

Den andre delen av resultatet gir at det fins ingen andre røtter til $P(z)$ enn $w_1, w_2, \ldots, w_n$, dvs. de er entydige/unike bortsett fra rekkefølgen. (Det er 'entydighetsdelen' av teoremet.) Det at rekkefølgen ikke er unik, skyldes at multiplikasjon i $\mathbb{C}$ er kommutativ, slik at f.eks.
$(z - w_1)(z - w_2) = (z - w_2)(z - w_1)$.

Vi legger videre merke til at røttene $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ikke trenger å være forskjellige, dvs. en rot w_i kan godt forekomme flere ganger i faktoriseringen

(3.1).

Definisjon 3.14 *Antall ganger en rot w_i forekommer i faktoriseringen (3.1) kalles (den algebraiske)* **multiplisiteten** *til roten.*

■

Eksempel 3.15 Polynomet gitt ved

$$P(z) = z(z-1)^3(z-i)^2(z+i)$$

er faktorisert på formen (3.1), og vi kan lese av røttene til polynomet og de tilhørende multiplisitetene.

Polynomet har røttene $z = 0$ med multiplisitet 1, $z = 1$ med multiplisitet 3, $z = i$ med multiplisitet 2 og $z = -i$ med multiplisitet 1. ■

En umiddelbar konsekvens av fundamentalteoremet er følgende

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Summen av multiplisitetene til røttene til et} \\ n\text{-te grads polynom er alltid } n.\end{array}} \tag{3.2}$$

Som sagt, reelle polynomer og likninger omfattes også av Teorem 3.12:

Eksempel 3.16 La $P(z) = z^3 - z^2 - 8z + 12$. Ved å prøve oss frem, finner vi at $z = 2$ er en rot. Vi kommer videre f.eks. ved hjelp av polynomdivisjon: At $P(2) = 0$ betyr at $z - 2$ er en faktor i $P(z)$, slik at vi kan 'dele' $P(z)$ med $z - 2$. La oss ta med den utregningen:

$$\begin{array}{l}
\ \ z^3 - z^2 - 8z + 12 \ : \ z - 2 = z^2 + z - 6 \\
\underline{-(z^3 - 2z^2)} \\
\qquad\quad z^2 - 8z + 12 \\
\qquad \underline{-(z^2 - 2z)} \\
\qquad\qquad -6z + 12 \\
\qquad\quad \underline{-(-6z + 12)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Det betyr at $z^3 - z^2 - 8z + 12 = (z-2)(z^2 + z - 6)$. Ved å løse andregradslikningen $z^2 + z - 6$, finner vi at de to andre røttene er $z = -3$ og $z = 2$. Dette gir at

$$P(z) = (z-2)(z-2)(z+3) = (z-2)^2(z+3),$$

og vi ser at roten 2 har multiplisitet 2, mens roten -3 har multiplisitet 1. Summen av multiplisitetene er 3, noe som stemmer for et tredjegradspolynom. ■

Eksempel 3.17 Polynomet $P(z) = z^4 + 6z^2 + 5$ kan faktoriseres som $(z^2+1)(z^2+5)$ (ved å sette $x = z^2$ får vi andregradslikningen $x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5)$). Likningen $z^2 + 1$ har røtter $\pm i$, mens likningen $z^2 + 5$ har røtter $\pm i\sqrt{5}$, som til sammen gir de fire røttene til fjerdegradspolynomet. Det gir faktoriseringen

$$z^4 + 6z^2 + 5 = (z-i)(z+i)(z-i\sqrt{5})(z+i\sqrt{5}).$$

■

Vi skal som sagt være spesielt interessert i *reelle* polynomer. Det kan dermed være lurt å merke seg følgende resultat:

Teorem 3.18 *Vi har:*

1) *Hvis w er rot i et* ***reelt*** *polynom, vil $\overline{w}$ også være en rot i polynomet.*

2) *To konjugerte røtter til et* ***reelt*** *polynom har alltid samme multiplisitet.*

3) *Ethvert* ***reelt*** *polynom av odde grad har alltid minst en reell rot.*

Punkt 1) skal vi vise for et spesielt polynom i neste seksjon. Sjekk at Teorem 3.18 stemmer med faktoriseringene i Eksempel 3.16 og Eksempel 3.17 (og sjekk gjerne noen andre polynomer også).

3.3 (Komplekse) egenverdier og egenvektorer

Vi husker fra MAT1001 at egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til en matrise A er noen egne/spesielle verdier og vektorer knyttet til matrisen. Det er de verdiene λ og de vektorene $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, som tilfredsstiller likningen

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Vi finner egenverdiene λ til matrisen A ved å løse den karakteristiske likningen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Bemerkning 3.19 Viktig! Siden vi skal løse reelle problemer, vil matrisene vi er interessert i være reelle. Det betyr at komponentene er reelle tall, og dermed er den karakteristiske likningen til en $n \times n$-matrise en algebraisk likning av grad n, der polynomet $\det(A - \lambda I)$ er et *reelt* polynom. Det betyr at Teorem 3.18 kan brukes. Dessuten sier algebraens fundamentalteorem at vi vil alltid ha n (muligens komplekse) røtter. ■

I MAT1001 jobbet vi kun med reelle egenverdier, og da vet vi bare at en $n \times n$-matrise har høyst n egenverdier. Ved å tillate komplekse tall, vil en $n \times n$-matrise ha nøyaktig n egenverdier *dersom disse telles i henhold til multiplisiteten egenverdiene får som røtter i den karakteristiske likningen.*

Vi må nå altså være forberedt på at både egenverdiene og egenvektorene kan være komplekse.

Bemerkning 3.20 For å huske at vi nå tillater komplekse løsninger, vil vi ofte bruke $\mathbf{z}$ istedenfor $\mathbf{x}$ for egenvektorene. I tilfellet der alle egenverdiene er reelle, vil egenvektorene også være det, og vi bruker da fortsatt $\mathbf{x}$ for egenvektorene. ■

Når vi skal finne de ulike egenvektorene skal vi løse likningssystemet

$$A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

for hver egenverdi λ (slik vi gjorde i MAT1001). Ved å multiplisere med en identitetsmatrise I, kan vi skrive dette systemet som

$$A\mathbf{z} = \lambda I\mathbf{z},$$

og dermed få systemet

$$(A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

Dette gir følgende (nye) **metode for å finne egenvektorene**:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{For hver egenverdi } \lambda \text{ til matrisen } A \text{ finner vi de tilhørende egenvektorene} \\ \text{ved å finne de ikke-trivielle løsningene til det homogene} \\ \text{likningssystemet (3.3) der matrisen} \\ A - \lambda I \text{ er koeffisientmatrisen.}\end{array}} \tag{3.4}$$

Bemerkning 3.21 Vi kan også si at de tilhørende egenvektorene til egenverdien λ finner vi ved å bestemme nullrommet $\text{Nul}(A - \lambda I)$, der vi holder nullvektoren utenfor. Dette er noe vi skal se nærmere på i neste seksjon. ■

I forhold til metoden vi brukte i MAT1001, er denne metoden litt mer i tråd med tankegangen i kurset MAT1012, så la oss se noen eksempler der vi bruker 'den nye metoden':

Eksempel 3.22 Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet er

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -9 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (10 - \lambda)(-2 - \lambda) + 36 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda - 4)^2. \end{aligned}$$

Den karakteristiske likningen $(\lambda-4)^2=0$ har én løsning, $\lambda=4$, dvs. at A har (kun) egenverdien 4, med multiplisitet 2.

Vi vil nå finne de tilhørende egenvektorene for $\underline{\lambda=4}$. Det betyr at vi skal løse likningssystemet

$$(A-4I_2)\mathbf{x}=\mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{x}\neq\mathbf{0}.$$

Vi har at

$$A-4I_2=\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -9\\ 4 & -6\end{bmatrix},$$

og dermed er den utvidede matrisen til systemet vi skal løse gitt ved

$$\begin{bmatrix}6 & -9 & 0\\ 4 & -6 & 0\end{bmatrix}.$$

Radredusering gir (sjekk!)

$$\begin{bmatrix}6 & -9 & 0\\ 4 & -6 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 4 & -6 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Dette gir løsninger (sjekk!)

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix} \qquad \text{der } s\in\mathbb{R}, s\neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda=4$. ■

Vi tar et eksempel der vi får komplekse løsninger:

Eksempel 3.23 Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen er (sjekk!) $\lambda^2-2\lambda+26=0$, som har løsningsmengde (sjekk!) $\{1+5i, 1-5i\}$, dvs. at A har komplekse egenverdier,

$\lambda = 1 + 5i$ eller $\lambda = 1 - 5i$.

For hver egenverdi finner vi de tilhørende egenvektorene:

$\underline{\lambda = 1 + 5i}$:

Vi skal løse

$$(A - (1 + 5i)I_2)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

som gir utvidet matrise (vi trekker fra $1 + 5i$ på diagonalen til A)

$$\begin{bmatrix} -5i & -5 & 0 \\ 5 & -5i & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi radreduserer (sjekk! -vi regner som vanlig, og husker at $i^2 = -1$):

$$\begin{bmatrix} -5i & -5 & 0 \\ 5 & -5i & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 5 & -5i & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir løsninger

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 + 5i$.

$\underline{\lambda = 1 - 5i}$:

Vi skal nå løse

$$(A - (1 - 5i)I_2)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}.$$

Den utvidede matrisen er nå (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 5i & -5 & 0 \\ 5 & 5i & 0 \end{bmatrix},$$

som radreduseres til (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi løsninger

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 - 5i$. ■

Se på Eksempel 3.23 en gang til. Vi ser at den eneste forskjellen i utregningene for de to egenvektorene, er at vi bytter fortegn foran imaginærdelene, dvs. vi konjugerer. Og enda mer; egenverdiene er også konjugerte av hverandre.

Dette er et generelt resultat:

Teorem 3.24 *La A være i $M_n(\mathbb{R})$. Hvis λ er en egenverdi for A med tilhørende egenvektor $\mathbf{z}$, så er $\overline{\lambda}$ også en egenverdi for A, med tilhørende egenvektor $\overline{\mathbf{z}}$.*

Bevis: La λ være en egenverdi for A med tilhørende egenvektor $\mathbf{z}$, dvs. $A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$. Ved å bruke regneregler for konjugasjon (se Teorem 3.9) og at A er reell, dvs. $A = \overline{A}$, får vi (sjekk!)

$$A\overline{\mathbf{z}} = \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{z}} = \overline{A\mathbf{z}} = \overline{\lambda\mathbf{z}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\mathbf{z}}.$$

Nå er $\overline{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$ siden $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Så $\overline{\lambda}$ er en egenverdi for A med tilhørende egenvektor $\overline{\mathbf{z}}$. □

Teorem 3.24 gir følgende muligheter for røttene til et reelt tredjegradspolynom (overbevis deg om dette!):

- tre reelle røtter, herunder tilfellene
  - én rot som har multiplisitet lik 3;
  - to forskjellige røtter som har multiplisitet henholdsvis lik 1 og 2;
  - tre forskjellige røtter som alle har multiplisitet lik 1;

- én reell rot, og to komplekse røtter, som er kompleks konjugerte av hverandre.

Vi tar et eksempel med en 3×3-matrise der vi får to komplekse egenverdier:

Eksempel 3.25 Vi vil finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiske likningen er (sjekk!)

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3+4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5) = 0.$$

Andregradslikningen $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ har løsningsmengde (sjekk!) $\{1+2i, 1-2i\}$, dvs. at A har egenverdiene $\lambda = 1$, $\lambda = 1+2i$ eller $\lambda = 1-2i$.

Vi ser at dette stemmer med at det karakteristiske polynomet er et reelt tredjegradspolynom, som har minst én reell rot, og de komplekse røttene er konjugerte av hverandre, dvs. dette stemmer med Teorem 3.18 til punkt og prikke (sjekk!).

For hver egenverdi finner vi de tilhørende egenvektorene:

$\underline{\lambda = 1}$:

Vi skal løse

$$(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Det gir utvidet matrise (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ved hjelp av radoperasjoner reduseres denne matrisen til (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi løsninger (vi mulitipliserer opp med 2, for å få litt 'penere' svar)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{R}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1$.

$\underline{\lambda = 1 + 2i}$:

Vi skal nå løse

$$(A - (1+2i)I_3)\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0}.$$

Vi får følgende radredusering:

$$\begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2i & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2i & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{2i}R_1 \\ \frac{1}{2}R_3 \leftrightarrow \frac{1}{2}R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -i & 0 \\ 2 & -i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)\cdot R_1 \text{til} R_2 \\ (-2)\cdot R_1 \text{til} R_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{i\cdot R_2 \text{til} R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir følgende løsninger:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0,$$

som er egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 + 2i$.

$\underline{\lambda = 1 - 2i}$:

Vi kan nå bruke Teorem 3.24. Det gir at egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 - 2i$ er gitt ved de konjugerte egenvektorene tilhørende $\lambda = 1 + 2i$, dvs. vektorene

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{der } s \in \mathbb{C}, s \neq 0.$$

Vi kan sjekke at dette stemmer ved å regne ut at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = (1 - 2i) \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

(gjør det!). ■

Når vi regner ut egenverdier og -vektorer for hånd, ser vi at den karakteristiske likningen vil gi oss begrensninger: For en $n \times n$-matrise får vi å løse en n-tegradslikning for å finne egenverdiene. For $n \geq 3$ tyr vi gjerne til maskiner.

Som sagt i Bemerkning 3.19 studerer vi *reelle* matriser. Reelle matriser vil ofte ha komplekse egenverdier og -vektorer, og vi skal treffe igjen slike matriser i neste kapittel.

I resten av dette kapittelet skal vi nå konsentrere oss om matriser der alle egenverdiene, og dermed egenvektorene, er reelle.

Et eksempel på reelle matriser med reelle egenverdier er reelle **diagonale**

matriser:

Teorem 3.26 *En diagonal $n \times n$-matrise D gitt ved*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

har egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Bevis: Det karakteristiske polynomet er (sjekk!)

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) = 0. \qquad \square$$

Egenvektorene til en diagonal matrise er også ekstra greie å finne:

La D være en diagonal matrise, og λ_i være en egenverdi for D. Siden

$$D\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$$

ser vi at standardbasisvektorene $\mathbf{e}_i$ kommer inn i bildet når vi skal finne egenvektorene tilhørende λ_i. Vi må bare huske å ta hensyn til multiplisiteten til λ_i. Vi bemerker også at det er veldig viktig å holde rekkefølge og beholde samme subscripter i i λ og $\mathbf{e}$ (sjekk for eksempel at $D\mathbf{e}_2 \neq \lambda_1 \mathbf{e}_2$!):

Hvis multiplisiteten til λ_i er lik 1 , er de tilhørende egenvektorene

$$s\,\mathbf{e}_i, \quad \text{der } s \neq 0.$$

Hvis multiplisiteten til λ_i er større enn 1 , er de tilhørende egenvektorene lineære kombinasjoner av de standardbasisvektorene som har subscript tilsvarende kolonnenummeret der λ_i står i matrisen.

Eksempel 3.27 Matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

har egenverdiene 2 med multiplisitet 2, og 0 og -1 med multiplisitet 1. De tilhørende egenvektorene for $\underline{\lambda = 2}$ er

$$\boxed{s\,\mathbf{e}_1 + t\,\mathbf{e}_4, \quad \text{der } s, t \neq 0},$$

for $\underline{\lambda = 0}$ er egenvektorene $\boxed{s\,\mathbf{e}_2, s \neq 0}$ og for $\underline{\lambda = -1}$ $\boxed{s\,\mathbf{e}_3, s \neq 0}$. Siden matrisen er 4×4, er egenvektorene vektorer i $\mathbb{R}^4$. (Sjekk at $D\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ for alle egenverdiene!). ∎

Vi nevner også hva det betyr **at** 0 **er en egenverdi til en matrise** A: I så tilfelle har vi oppfylt likningen

$$A\mathbf{z} = 0\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \text{der } \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

dvs. at likningssystemet $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger. Ved Invertibelmatriseteoremet betyr dette at A ikke er inverterbar. Vi har dermed fått enda en karakterisering av **en inverterbar matrise**:

- Tallet 0 er *ikke* en egenverdi for A.

Dette gir et ekstra punkt vi kan tilføye i Invertibelmatriseteoremet på slutten av Kapittel 2.

Eksempel 3.28 Matrisen D i Eksempel 3.27 har 0 som egenverdi, dermed er D ikke inverterbar. La $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ og $\mathbf{d}_4$ være kolonnene til D. Du kan sjekke at (jfr. Invertibelmatriseteoremet)

- $\det(D) = 0$;

- D er ikke radekvivalent med I_4;

- Det fins $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ slik at likningssystemet $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er uten løsning;
- Likningssystemet $D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger;
- Mengden $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4\}$ er lineært avhengig;
- Vektorene $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ og $\mathbf{d}_4$ utspenner ikke $\mathbb{R}^4$.

■

3.4 Egenrom

For hver egenverdi λ til en matrise A finner vi altså de tilhørende egenvektorene ved å finne de ikke-trivielle løsningene til likningssystemet

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Siden dette systemet er homogent, vil alle løsningene (inkludert $\mathbf{0}$) utgjøre *nullrommet* til matrisen $A - \lambda I$, $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$, og dermed gi et underrom av $\mathbb{R}^n$, så lenge λ er reell. Vi definerer:

Definisjon 3.29 *La $A \in M_n(\mathbb{R})$ og anta at $\lambda \in \mathbb{R}$ er en egenverdi til A. Mengden av alle løsningene til likningssystemet*

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

kalles egenrommet til A tilhørende λ, og skrives E_λ, dvs.

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathrm{Nul}(A - \lambda I).$$

Bemerkning 3.30 Nullvektoren er per definisjon ikke en egenvektor, men siden vi ønsker at et egenrom skal være et underrom, må vi ha med $\mathbf{0}$ i et egenrom. ■

Et egenrom vil dermed ha en basis og en dimensjon. Vi husker fra utregningene for nullrom i Seksjon 1.8, at når vi finner en basis for nullrommet ved radredusering, vil vektorene vi leser ut av matriseformen til løsningene være lineært uavhengige. Disse utregningene er akkurat de samme som den 'nye' metoden (3.4) vi bruker for å finne egenvektorer. Vi har dermed følgende:

Når vi bruker metoden (3.4) til å finne egenvektorer for matrisen A tilhørende egenverdien λ, vil vektorene vi leser ut av matriseformen til løsningene være lineært uavhengige, og vi finner dermed en basis for E_λ.	(3.6)

Eksempel 3.31 Vi vil finne egenrommene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi må først finne egenverdiene. Den karakteristiske likningen er (sjekk!)

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0,$$

som er et polynom av grad 3. Vi må prøve oss litt frem, og finner bl.a. at $\lambda = 1$ er en rot, og vi kan dermed finne de resterende røttene. Egenverdiene til matrisen A er (sjekk!) 1 med multiplisitet 2, og 5 med multiplisitet 1.

Egenrommet E_1 finner vi ved å løse likningssystemet $(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som gir radreduseringen (sjekk!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siden systemet har to frie variabler, vil E_1 være 2-dimensjonalt, og vi finner at (sjekk!)

$$E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De to vektorene som utspenner E_1 er lineært uavhengige (per metode, se

(3.6)), og vil danne en basis for E_1.

Egenrommet E_5 er endimensjonalt, og du kan sjekke at

$$E_5 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dette egenrommet er dermed en linje i $\mathbb{R}^3$ gjennom origo. Vektorene $\mathbf{x}$ som ligger på denne linja er alle slik at $A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}$, der A er 3×3-matrisen i dette eksempelet. ■

Vi merker oss at for en egenverdi λ kan det vises at

$$\boxed{\dim E_\lambda \leq \text{ multiplisiteten til } \lambda} \tag{3.7}$$

(tenk litt over dette!) I Eksempel 3.31 har vi likhet i (3.7), og vi har også sett et eksempel der vi får oppfylt streng ulikhet i (3.7):

Eksempel 3.32 I Eksempel 3.22 så vi at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

(kun) har egenverdien 4 med tilhørende egenvektorer

$$s \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, s \neq 0.$$

Det betyr at

$$E_4 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

så $\dim E_4 = 1$, mens multiplisiteten til egenverdien 4 er 2.

Egenrommet E_4 er linja gitt ved $y = \frac{2}{3}x$ (sjekk!), så vektorene $\mathbf{v}$ på denne linja er slik at $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$. ■

Vi har nå sett på egenverdiene hver for seg. Hva skjer mellom egenvektorer for ulike egenverdier? Vi har følgende resultat:

Teorem 3.33 *La $A \in M_n(\mathbb{R})$, og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ være egenvektorer tilhørende forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ for A. Da er mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ lineært uavhengig.*

Vi tar med beviset for spesielt interesserte. Beviset er med andre ord ikke pensum i MAT1012.

Bevis: Vi viser dette ved å anta at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært avhengig, og viser at dette fører til noe usant (vi får en motsigelse). Dermed må det motsatte, nemlig at mengden er lineært uavhengig, være sant:

Anta at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært avhengig. Det betyr at minst en av vektorene i mengden er en lineær kombinasjon av de andre vektorene. Vi *ordner* vektorene slik at r er den minste indeksen slik at $\mathbf{v}_{r+1}$ er en lineær kombinasjon av de *foregående* lineært uavhengige vektorene (overbevis deg selv om at vi kan gjøre dette!). Da fins det skalarer $k_1, k_2, \ldots, k_r$ forskjellige fra 0 slik at

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r+1}. \tag{3.8}$$

Vi multipliserer likningen med A:

$$\begin{aligned} A(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r) &= A\mathbf{v}_{r+1} \\ k_1(A\mathbf{v}_1) + k_2(A\mathbf{v}_2) + \cdots + k_r(A\mathbf{v}_r) &= A\mathbf{v}_{r+1}, \end{aligned}$$

og siden $\mathbf{v}_i$-ene er egenvektorer tilhørende henholdsvis egenverdiene λ_i, får vi

$$k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}.$$

Vi har nå fått nye skalarer inn i likningen (3.8) som vi startet med, dvs. at vi har likningssystemet

$$\begin{cases} L_1: & k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{r+1} \\ L_2: & k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \lambda_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}. \end{cases}$$

Ved å sette uttrykket for $\mathbf{v}_{r+1}$ i L_1 inn i L_2 får vi

$$k_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + k_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \lambda_{r+1}(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r)$$

som gir

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\mathbf{v}_r = \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

Siden mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ er antatt lineært *u*avhengig, så er skalarene $k_i(\lambda_i - \lambda_{r+1})$ i (3.9) lik 0 for $i = 1, 2, \ldots, r$. Videre, siden egenverdiene er antatt forskjellige, er $(\lambda_i - \lambda_{r+1}) \neq 0$ for $i = 1, 2 \ldots, r$, som betyr at $k_i = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, r$.

Ser vi nå på likningen (3.8) som vi startet med, får vi at $\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0}$, noe som er umulig! Dermed får vi motsigelsen vi ønsket, så mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er ikke lineært avhengig, dvs. den er lineært uavhengig. □

Eksempel 3.34 I Eksempel 3.31 har matrisen A to egenrom,

$$E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og

$$E_5 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Teorem 3.33 gir at mengdene

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært uavhengige, siden hver av mengdene inneholder egenvektorer tilhørende forskjellige egenverdier.

Legg merke til at teoremet ikke sier noe om mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er lineært uavhengig. I neste seksjon vil vi imidlertid gi et resultat som sier at denne mengden er lineært uavhengig. Foreløpig kan vi sjekke at mengden er lineært uavhengig ved Invertibelmatriseteoremet (gjør det!). ■

3.5 Diagonalisering

Vi har sett at diagonale matriser er ekstra enkle å ha med å gjøre. Vi skal nå se hva det vil si å *diagonalisere* en matrise. Dette er en nyttig operasjon som først og fremst holder styr på egenverdier og -vektorer til matrisen, og som har flere anvendelser.

I neste kapittel skal vi få bruk for diagonalisering når vi skal løse systemer av difflikninger, og i dette kapittelet skal vi se et eksempel på hvordan diagonalisering dukker opp f.eks. i kjemi, i såkalt Hückelteori. Vi har dessuten allerede brukt diagonalisering i forkledning i MAT1001; i forbindelse med populasjonsdynamikk.

Vi starter med en definisjon:

Definisjon 3.35 *En kvadratisk matrise A kalles* diagonaliserbar *hvis A kan faktoriseres på formen*

$$A = PDP^{-1}$$

der D er en diagonal matrise og P er en inverterbar matrise.

Vi ser umiddelbart at en $n \times n$ diagonal matrise D er diagonaliserbar siden $D = I_n D I_n^{-1}$, dvs. P er identitetsmatrisen (og $I_n^{-1} = I_n$).

Eksempel 3.36 Matrisen A gitt ved

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

er diagonaliserbar fordi A kan faktoriseres som $A = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(vi skal straks forklare hvordan vi finner disse matrisene). Du kan sjekke at

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

og at

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

■

Å *diagonalisere* matrisen A vil si å finne P (inverterbar matrise) og D (diagonal matrise) slik at $A = PDP^{-1}$. Du trenger ikke nødvendigvis å regne ut P^{-1} -med mindre du trenger den/blir spurt om det.

Det er ikke alle matriser som kan diagonaliseres. Istedenfor å lete etter eksempler på matriser som ikke er diagonaliserbare, stiller vi heller det generelle spørsmålet 'Hvilke matriser er diagonaliserbare?'

Vi går nå i gang med å svare på dette spørsmålet: Hvis A er diagonaliserbar, så skal A kunne skrives som $A = PDP^{-1}$ der P er inverterbar og D er en diagonal matrise. La oss anta at det er tilfellet. Hvordan må P og D da se ut?

Ved å multiplisere med P får vi

$$AP = PD.$$

Kall kolonnene til P for $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, og diagonalkomponentene til D for $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Vi har

$$AP = A[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] = [A\mathbf{u}_1\ A\mathbf{u}_2\ \cdots\ A\mathbf{u}_n]$$

og

$$PD = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{bmatrix} = [\mu_1\mathbf{u}_1\ \mu_2\mathbf{u}_2\ \cdots\ \mu_n\mathbf{u}_n].$$

Siden $AP = PD$, har vi

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i, \quad \text{for alle } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Matrisen P er inverterbar per antagelse, så alle kolonnevektorene $\mathbf{u}_i$ er forskjellige fra $\mathbf{0}$. Dermed gir (3.10) at kolonnene til P og diagonalkomponentene til D er henholdsvis egenvektorene og egenverdiene for A, der diagonalkomponentene til D korresponderer, henholdsvis, til kolonnene til P. Dessuten, Invertibelmatriseteoremet gir at kolonnene til P er lineært uavhengige, siden P er inverterbar.

Vi har dermed sett at hvis A er diagonaliserbar som $A = PDP^{-1}$, så består P av n lineært uavhengige egenvektorer for A, og D består, henholdsvis, av de tilhørende egenverdiene.

Vi har dermed vist 'bare hvis'-delen av det såkalte *Diagonaliseringsteoremet*:

Teorem 3.37 ***(Diagonaliseringsteoremet)*** *En $n \times n$-matrise A kan diagonaliseres som $A = PDP^{-1}$ hvis og bare hvis kolonnene til P er n lineært uavhengige egenvektorer for A.*
I så tilfelle er diagonalkomponentene til D egenverdiene til A som korresponderer, henholdsvis, til kolonnene til P.

Beviset for 'hvis'-delen består i å følge argumentene vi utførte for å vise 'bare hvis'-delen, bare baklengs. Det er en fin oppgave å gjøre det!

For å diagonalisere en $n \times n$-matrise trenger vi altså n lineært uavhengige egenvektorer.

Eksempel 3.38 I Eksemplene 3.31, 3.34 og 3.36 har vi møtt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Siden A er 3×3, og vi i Eksempel 3.34 fant tre lineært uavhengige egenvektorer for A, er A diagonaliserbar ved Diagonaliseringsteoremet 3.37.

Det samme teoremet forklarer også hvor matrisene P og D i diagonaliseringen av A i Eksempel 3.36 kommer fra, siden de består henholdsvis av lineært uavhengige egenvektorer og tilhørende egenverdier (sjekk!):

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Når vi har bestemt rekkefølgen på kolonnene i P, er rekkefølgen på diagonalkomponentene til D også bestemt, siden disse må korrespondere.

Vi kan bytte rekkefølge på kolonnene til P, men D må endres tilsvarende. Vi ser da at i (3.11) kan de to første kolonnene i P byttes uten at D forandres (men P^{-1} vil forandres). Vi kan også for eksempel ha

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Diagonaliseringsteoremet gir følgende **metode for (om mulig) å diagonalisere en $n \times n$-matrise** A:

1) Finn egenverdiene til A.

2) Finn n lineært uavhengige egenvektorer til A. Hvis de ikke fins, er A ikke diagonaliserbar. Hvis de fins, gå videre i metoden.

3) Lag matrisen P der vektorene i 2) utgjør kolonnene (rekkefølgen på kolonnene er ikke viktig).

4) Lag den diagonale matrisen D der de tilhørende egenverdiene til vektorene i 3) utgjør diagonalkomponentene (rekkefølgen på komponentene er viktig her! -diagonalkomponentene i D må korrespondere, en og en, med kolonnene i P)

- **Merknad:** Det er flere valg for P i punkt 3) siden rekkefølgen på kolonnene ikke er viktig. Dermed kan A diagonaliseres på flere måter.

- **Mulighet for sjekk av riktig utregning:** Sjekk at P er inverterbar, og at $AP = PD$ -da slipper du å invertere P. Eventuelt finn P^{-1} og sjekk at $A = PDP^{-1}$.

Eksempel 3.39 Vi vil diagonalisere matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

1) Vi finner egenverdiene. Den karakteristiske likningen er $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, med løsninger 1 og 2.

2) Vi finner egenrommene. Radreduseringen

$$\begin{bmatrix} -3 & 12 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gir

$$E_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

og radreduseringen

$$\begin{bmatrix} -4 & 12 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gir

$$E_2 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ved Teorem 3.33 er $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en lineært uavhengig mengde, så A er diagonaliserbar, ved Diagonaliseringsteoremet.

3) $P = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(sjekk gjerne at P er inverterbar , og at $AP = PD$!). ■

Spørsmålet er nå: 'Hvilke $n \times n$-matriser er det som har n lineært uavhengige egenvektorer' (og dermed er diagonaliserbar)?

Ved å sette sammen Teorem 3.33 og Diagonaliseringsteoremet 3.37, får vi iallfall følgende resultat (sjekk!):

Teorem 3.40 *En $n \times n$-matrise med n forskjellige egenverdier er diagonaliserbar.*

Når det gjelder $n \times n$-matriser som ikke har n forskjellige egenverdier, har vi i Eksempel 3.22 sett at 2×2-matrisen $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ kun har en egenverdi, og kun én lineært uavhengig egenvektor. Denne matrisen har dermed ikke nok lineært uavhengige egenvektorer til å være diagonaliserbar.

Til gjengjeld har vi i Eksempel 3.31 sett 3×3-matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ som har to egenverdier, og tre lineært uavhengige egenvektorer siden egenverdien med multiplisitet 2 her gir opphav til to lineært uavhengige egenvektorer. Denne matrisen er som vi vet diagonaliserbar.

Det kan se ut til at dimensjonen til egenrommene og multiplisiteten til egenverdiene kan hjelpe oss å formulere noe om hvilke matriser som har n lineært uavhengige egenvektorer, og dermed er diagonaliserbare. Og riktignok, følgende resultat kan vises:

Teorem 3.41 *La A være en $n \times n$-matrise med p forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Matrisen A er diagonaliserbar hvis og bare hvis summen av dimensjonene til de ulike egenrommene er n.*
Dette skjer hvis og bare hvis dimensjonen til egenrommet tilhørende λ_k er lik multiplisiteten til λ_k for hver $k = 1, 2, \ldots, p$.

Selve beviset bygger på følgende resultat (et resultat vi annonserte i Eksempel 3.34):

Teorem 3.42 *La $A \in M_n(\mathbb{R})$, og anta at $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ er forskjellige egenverdier til A. For hver k, la $\mathcal{B}_k$ være en basis for egenrommet E_{λ_k}. La $\mathcal{B}$ være mengden som består av alle vektorene fra alle $\mathcal{B}_k$-ene. Da er $\mathcal{B}$ lineært uavhengig.*

3.6 Anvendelse: Hückelteori

Vi så i MAT1001 hvordan matriser kan brukes til å holde styr på mye informasjon (binære matriser og søkemotorer på nettet).

Neste eksempel er hentet fra såkalt Hückelteori innen kjemi. Denne teorien er kort fortalt en enkel modell for å beregne molekylorbitaler for en del hydrokarboner. Vi skal ikke gå inn på denne teorien her, men heller observere at diagonalisering av matriser spiller en sentral rolle:

For en del hydrokarboner kan man sette opp den såkalte Hückelmatrisen, som koder hvordan atomene i molekylet sitter sammen (matrisen holder styr på informasjon). Når Hückelmatrisen er diagonalisert kan man bruke dette til å studere egenskaper til molekylet.

Vi tar et eksempel på en Hückelmatrise:

Eksempel 3.43 Vi vil diagonalisere Hückelmatrisen til stoffet butadien, som er gitt ved

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Den karakteristiske likningen er (sjekk!)

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1 = 0.$$

Ved å substituerer $u = \lambda^2$ får vi $u^2 - 3u + 1 = 0$, som har løsninger (sjekk!) $u = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Det gir $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$. Vi kan imidlertid gjøre dette svaret penere, ved følgende algebraiske manipulasjoner:

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{5} + 5}{4} = \Big(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\Big)^2$$

Dermed får vi de fire egenverdiene

$$\lambda = \pm\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Siden H er en 4×4-matrise med 4 forskjellige egenverdier, er H diagonaliserbar ved Teorem 3.40. Videre, siden basiselementene for de ulike egenrommene danner en basis for $\mathbb{R}^4$ ved Teorem 3.33, vil hvert av egenrommene ha dimensjon 1.

Vi finner egenrommene ved radredusering som vanlig. Eventuelt kan man ty til maskin, men det er fin regnetrening å sjekke at (gjør det!)

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dvs. at

$$E_{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Helt tilsvarende utregninger, med $-$ for $+$ foran $\sqrt{5}$, gir

$$E_{-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vi legger merke til at $E_{-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$ også kan uttrykkes ved hjelp av tallet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ siden (sjekk!)

$$\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

På tilsvarende måte får vi at de to andre egenrommene $E_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ og $E_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ er gitt ved

$$E_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

og

$$E_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 \\ -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\right\}.$$

Vi kan dermed diagonalisere H (Hückelmatrisen til butadien) for eksempel ved å bruke

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \end{bmatrix}$$

og

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 & -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 & 1 & -(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved Teorem 3.42 (eventuelt Teorem 3.33), utgjør de fire kolonnene til P en basis for $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer.

Matrisene D og P gir informasjon om butadien-molekylet. ■

3.7 Nå skal du kunne

- definisjonen av komplekst n-tuppel, $\mathbb{C}^n$, kompleks vektor, konjugert vektor, konjugert matrise, reelt polynom, komplekst polynom, algebraisk n-te grads likning, multiplisitet til en rot, egenrom, diagonaliserbar matrise

- finne egenverdiene til en diagonal matrise

- forklare hva det betyr at 0 er en egenverdi til en matrise

- vite hvordan vi finner egenrommene til en matrise, og regne ut disse for hånd for 'små' matriser

- vite hva det vil si å diagonalisere en matrise, og vite at dette gir nyttig informasjon, som bl.a. anvendes innenfor kjemi (f.eks. Hückelteori)

- løse oppgaver (for hånd for 'små' matriser) av typen 'Er A diagonaliserbar. Begrunn. Hvis ja, finn en diagonalisering av A'.

- gjøre rede for Algebraens fundamentalteorem og Diagonaliseringsteoremet

3.8 Oppgaver, kapittel 3

Oppgave 61 Regn ut $s\mathbf{w} + t\mathbf{z}$ når $s = i, t = 1 + 2i, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -4i \\ 2-i \end{bmatrix}$ og $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 2i \end{bmatrix}$.

Oppgave 62 Finn $\overline{A\mathbf{z}}$ når

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & 1 \\ 4 & -1 & i \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 63 La $A \in M_n(\mathbb{R})$ og la $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Vis at

$$\operatorname{Re}(A\mathbf{z}) = A\operatorname{Re}(\mathbf{z}) \quad \text{og} \quad \operatorname{Im}(A\mathbf{z}) = A(\operatorname{Im}\mathbf{z}).$$

Oppgave 64 Faktoriser $z^6 - 9z^2$

a) i reelle polynomer;

b) i komplekse polynomer.

Oppgave 65 a) Regn ut $(z-3+i)(z-3-i)$

b) Vis at $(z-w)(z-\overline{w})$ er et reelt polynom for $w \in \mathbb{C}$.

Oppgave 66 Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Oppgave 67 Finn egenverdier og egenvektorene til matrisen:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (*Hint*: Du må prøve deg frem for å finne en rot i det karakteristiske polynomet.)

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 68 Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen A og skriv vektoren $\mathbf{x}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 69 Vis at egenverdiene til en øvre triangulær matrise er komponentene på hoveddiagonalen.

Oppgave 70 La A være en $n \times n$-matrise og anta at A har n reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (repetert etter multiplisitet), dvs.

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Forklar hvorfor $\det(A)$ er produktet av de n egenverdiene til A.

Oppgave 71 Vi minner om at A^T ('A transponert') er matrisen der radene i A utgjør kolonnene, og kolonnene i A utgjør radene. Vis at A og A^T har de samme egenverdiene. Har de også de samme egenvektorene?

Oppgave 72 To $n \times n$-matriser A og B kalles *similære* dersom det finnes en inverterbar matrise P slik at $B = PAP^{-1}$. Vis at A og B da har de samme egenverdiene. Finn egenvektorene til B uttrykt ved hjelp av P og egenvektorene til A.

Oppgave 73 Anta at A er en inverterbar matrise og at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda \neq 0$. Vis at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A^{-1} med egenverdi λ^{-1}.

Oppgave 74 Vis at dersom alle kolonnene i en matrise har samme sum, så er dette tallet en egenverdi for matrisen (*Hint*: Gjør noen radoperasjoner før du regner ut determinanten til $\lambda I_n - A$). Bruk dette til å finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 75 Vis at egenverdien til en 2×2-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

Bruk denne formelen til å forklare at egenverdiene til en symmetrisk (reell) 2×2-matrise (dvs. $b = c$) alltid er reelle.

Oppgave 76 For hver av matrisene i Oppgave 66 a)-d):

i) Finn multiplisiteten til hver egenverdi λ.

ii) Finn egenrommet E_λ og $\dim E_\lambda$ for hver egenverdi λ.

iii) Gi en geometrisk tolkning av egenrommene.

iv) Fins det en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer til matrisen? Begrunn.

Oppgave 77 Diagonaliser A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Oppgave 78 For hver av de tre matrisene i Oppgave 68: Diagonaliser matrisen A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

Oppgave 79 La $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Finn en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P slik at $A = PDP^{-1}$.

Oppgave 80 Finn en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P slik at $A = PDP^{-1}$. Finn også P^{-1}.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Oppgave 81 For hver matrise A nedenfor er egenverdiene til A oppgitt. Er A diagonaliserbar? Begrunn. Hvis ja, diagonaliser A.

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 7 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$ $(\lambda = \frac{1}{3}, -1)$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 4)$

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 4, 5)$

e) $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ $(\lambda = 1, 3)$

Oppgave 82 La $a, b \in \mathbb{R}$ og la A være matrisen gitt ved

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

b) Finn en inverterbar matrise P, dens inverse matrise P^{-1} og en diagonal matrise slik at $A = PDP^{-1}$. (*Hint:* P og D er komplekse matriser, og kan komponeres av egenvektorer og egenverdier, som i det reelle tilfellet. Vi kan også invertere komplekse matriser på samme måte som reelle matriser, der vi bruker at $i^2 = -1$.)

Oppgave 83 La $A \in M_n(\mathbb{R})$ med en kompleks egenverdi $\lambda = a - ib$ ($b \neq 0$) og tilhørende egenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$.

a) Vis at $A(\operatorname{Re}\mathbf{v}) = a\operatorname{Re}\mathbf{v} + b\operatorname{Im}\mathbf{v}$ og $A(\operatorname{Im}\mathbf{v}) = -b\operatorname{Re}\mathbf{v} + a\operatorname{Im}\mathbf{v}$. (*Hint:* Skriv $\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{v} + i\operatorname{Im}\mathbf{v}$ og regn ut $A\mathbf{v}$.)

b) Vis at $AP = PC$ der

$$P = [\operatorname{Re}\mathbf{v}\ \ \operatorname{Im}\mathbf{v}] \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

3.9 Fasit, kapittel 3

Oppgave 61 $\begin{bmatrix} 4+5i \\ -3+4i \end{bmatrix}$

Oppgave 62 a) $\begin{bmatrix} 4-i \\ 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2i+2 \\ -6i \end{bmatrix}$

Oppgave 63 ikke fasit

Oppgave 64

a) $z^2(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z^2+3)$

b) $z^2(z-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})$

Oppgave 65

a) $z^2-6z+10$

b) $w=a+ib$ gir $(z-w)(z-\overline{w})=z^2-2az+a^2+b^2$ $(a,b\in\mathbb{R})$

Oppgave 66

a) $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1=3,\lambda_2=-1,\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1=5,\lambda_2=1,\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\lambda_1=2,\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) $\lambda_1 = 1+\sqrt{3}, \lambda_2 = 1-\sqrt{3}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

f) $\lambda_1 = 4+i, \lambda_2 = 4-i, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+i \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1-i \end{bmatrix}$

Oppgave 67

a) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{5}, \lambda_3 = -\sqrt{5}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \sqrt{5}-1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \sqrt{5}+1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Oppgave 68

a) Egenverdier $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$, egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, lineær kombinasjon $\mathbf{x} = \frac{3}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{11}{5}\mathbf{v}_2$

b) Egenverdier $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$, egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, lineær kombinasjon $\mathbf{x} = -4\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$

c) Egenverdier $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$, egenvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, lineær kombinasjon $\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$

Oppgave 69 ikke fasit

Oppgave 70 Sett $\lambda = 0$. (Sjekk også resultatet på noen matriser du kjenner!)

Oppgave 71 Egenvektorene er vanligvis ikke de samme. Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er f.eks. en egenvektor for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, men ikke for A^T.

Oppgave 72 Egenvektorene til B er på formen $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{u}$ der $\mathbf{u}$ er en egenvektor for A.

Oppgave 73 ikke fasit

Oppgave 74 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Oppgave 75 ikke fasit

Oppgave 76

a) i) Egenverdiene 1 og 3 har begge multiplisitet 1.

ii) $E_1 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, E_3 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \dim E_1 = 1, \dim E_3 =$ 1.

iii) Hvert av egenrommene er en linje i $\mathbb{R}^2$ gjennom origo utspent av $(-1, 1)$ (for E_1) og $(1, 1)$ (for E_3).

iv Ja, siden matrisen er 2×2 og har to forskjellige egenverdier, er basisvektorene for E_1 og E_3 lineært uavhengige. Vi har dermed to lineært uavhengige egenvektorer i $\mathbb{R}^2$, som dermed gir en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer.

b) og c) Tilsvarende svar som i a), bare bytt ut egenverdier og egenvektorer fra fasiten i Oppgave 66.

d) i) Egenverdien 2 har multiplisitet 2.

ii) $E_2 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \dim E_2 = 1.$

iii) E_2 er en linje i $\mathbb{R}^2$ gjennom origo utspent av $(-1, 1)$.

iv) Nei, matrisen har kun én lineært uavhengig egenvektor som ikke er nok til å utspenne $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 77

a) $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Oppgave 78

a) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix})$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix})$

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix})$

Oppgave 79 $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix})$

Oppgave 80

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Oppgave 81

a) Ja, er 2×2 og har 2 forskjellige egenverdier.
$P = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Nei, er 2×2 og har ikke 2 lineært uavhengige egenvektorer.

c) Ja, er 3×3 og har 3 forskjellige egenverdier.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Nei, er 3×3 og har ikke 3 lineært uavhengige egenvektorer..

e) Ja, er 3×3 og har 3 lineært uavhengige egenvektorer ($\dim E_3 = 2$).

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 82

a) Egenverdier $a \pm ib$ og egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$

Oppgave 83 ikke fasit