UiO – MAT1012 – Våren 2011

Ekstraoppgavesamling

I tillegg til eksamen og prøveeksamen fra våren 2010 inneholder denne samlingen en del oppgaver som er blitt gitt til eksamen i diverse andre emner ved UiO i løpet av de siste femten årene. Noen av disse er lettere endret for å passe inn i MAT1012. Vær oppmerksom på at utvalget av oppgaver er dessverre noe skjevt i den forstand at noen deler av pensum er dårlig dekket.

Eksamen – MAT1012 – Våren 2010

Oppgave 1

Vi betrakter vektorene i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

a) Betrakt påstanden ' $\mathbf{b}$ er en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ '.
Formuler denne påstanden som en vektorlikning og på matriseform. Avgjør deretter om påstanden er sann eller gal.
Som hjelp får du opplyst at den reduserte trappeformen til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ er lik } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Sett $U = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ og la A være 3×3 matrisen som har $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ som sine kolonnevektorer.
Angi en basis for U og avgjør om A er inverterbar.

c) Hvis du svarte i b) at A er inverterbar, finn A^{-1}. Hvis du svarte at den ikke er det, finn en basis for $\text{Nul}\, A$.

d) Vektoren $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$ er en kompleks egenvektor til A.

Finn den komplekse egenverdien som $\mathbf{z}$ tilhører. Angi deretter de andre (reelle eller komplekse) egenverdiene til A sammen med en tilhørende egenvektor.

Oppgave 2

La Ω betegne området i xy-planet som begrenses av trekanten med hjørner i $(0,0),(1,-1)$ og $(1,1)$.

a) Beskriv Ω som et område av type I og beregn $\iint_\Omega (2y+e^{-x^2})\,dxdy$.

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y)=(x+2y-4,5x+4y-8),\;(x,y)\in\mathbb{R}^2\,.$$

La C betegne randkurven til området Ω, som vi gjennomgår i positivt retning, dvs mot klokkeretningen (sett ovenfra).

b) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C.
Er $\mathbf{F}$ konservativt ?

c) Vektorfeltet $\mathbf{F}$ kan skrives på formen $\mathbf{F}(\mathbf{x})=A\,\mathbf{x}+\mathbf{b}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$,
for en 2×2 matrise A og en $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$.

Angi A og $\mathbf{b}$. Begrunn deretter at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

Som hjelp får du opplyst at matrisen A har egenverdiene -1 og 6.

d) Anta at en deriverbar vektorvaluert funksjon $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ tilfredstiller $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ for alle $t\in\mathbb{R}$ samt initialbetingelsen $\mathbf{r}(0)=(6,3)$.

Finn $x(t)$ og $y(t)$ der $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$.

e) Vi ønsker å finne hvilken verdi av t som gjør at $|x(t)|$ blir minst mulig (denne verdien er nemlig den som gjør avstanden fra $\mathbf{r}(t)$ til y-aksen minst mulig). Har du regnet riktig i punkt d) vil du ha funnet ut at $x(t)$ er lik $\alpha\,(2e^{-t}+e^{6t})$ for en konstant $\alpha>0$.

Vi betrakter derfor funksjonen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gitt ved $g(t)=2e^{-t}+e^{6t}$, $t\in\mathbb{R}$.

Finn hvilken verdi av t som gir et globalt minimumspunkt for g. Angi også den lineære approksimasjonen av g i $t=0$.

MAT1012 –Våren 2010 – Prøveeksamen

Oppgave 1

Sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ betegne kolonnevektorene til A.

a) Skriv $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som en vektorlikning.
Begrunn deretter at systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent og angi $\mathbf{b}$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Som hjelp får du opplyst at den reduserte trappeformen til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ er lik } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Begrunn at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengig og at A er inverterbar.

c) Finn en basis for $\mathrm{Nul}(A - 2I)$.

d) Begrunn at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ blir diagonal.

e) Finn den generelle løsningen av 1. ordens diff.likning systemet gitt ved

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \text{der } \mathbf{c} = (0, 2, 0)\,.$$

Oppgave 2

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (5x - 2y, -2x + 2y)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

a) Begrunn at $\mathbf{F}$ er konservativt og finn potensialfunksjonen ϕ for $\mathbf{F}$ som er slik at $\phi(2, 2) = 6$.

b) Sjekk at punktene $(-2,-2)$ og $(2,2)$ ligger på samme nivåkurve for ϕ. La så C være kurven som går i rett linje fra $(-2,-2)$ til $(2,2)$. Finn verdien av linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C.

c) La Ω betegne området i xy-planet som avgrenses av trekanten med hjørner i $(-2,-2), (-2,2)$ og $(2,2)$.

Beskriv Ω som et område av type I og beregn $\iint_\Omega \phi(x,y)\, dxdy$.

Oppgave 3

En 2×2 reell matrise A har en kompleks egenvektor $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{bmatrix}$ som tilhører egenverdien $\lambda = \frac{1}{6}(3+4i)$.

Begrunn først at $A^n\,\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ når $n \to \infty$ dersom $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Begrunn deretter at dette holder for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Ekstraoppgave hvis du har tid til overs:

Finn matrisen A i Oppgave 3.

Oppgave I-1

La $f(x) = \ln(4 - x^2)$, $|x| < 2$.

a) Avgjør hvor f er voksende og avtakende, og finn eventuelle maksimums- og minimumspunkter.

b) Vis at f alltid krummer nedover.

c) La $F(x)$ være Taylor polynomet til f i $x = 0$ av grad 2. Finn et uttrykk for $F(x)$ og tegn grafene til f og F i samme koordinatsystem.

Oppgave I-2

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 1, \quad x \geq -2.$$

a) Finn alle maksimums- og minimumspunktene til f og avgjør hvor funksjonen vokser og hvor den avtar.

b) Finn eventuelle vendepunkter for f og avgjør hvor grafen krummer opp og hvor den krummer ned.

c) Skisser grafen til f.

Oppgave I-3

La $f(x) = xe^{-x}$.

a) Hvor er $f(x)$ voksende og hvor er den avtagende? Finn mulige maksimums- og minimumspunkter.

b) Avgjør hvor grafen til $f(x)$ krummer oppover og hvor den krummer nedover, og finn mulige vendepunkter. Skisser grafen for $x \in [-0.5, 4]$.

c) La A være det området av planet som ligger mellom x-aksen og grafen til $f(x)$ for $x \in [0, 4]$. Hva er arealet av A?

Oppgave I-4

La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = (x - a)\, e^{x/a}$$

for alle reelle tall x, der $a > 0$ er en konstant.

a) Finn eventuelle nullpunkter for f. Avgjør hvor f vokser og avtar, og angi eventuelle ekstrempunkter for f.

b) Avgjør hvor grafen til f krummer opp og hvor den krummer ned, og angi eventuelle vendepunkter. Skisser grafen til f når $a = 1$.

   Ved skisseringen kan du gå ut fra (uten bevis) at $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Oppgave I-5

Beregn det bestemte integralet $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}(\ln x)^2 \, dx$.

Oppgave I-6

Beregn $\int\limits_0^1 t\sqrt{1-t^2}\, dt$

Oppgave I-7

Beregn integralene $I_1 = \int\limits_1^e x \ln x \, dx$, og $I_2 = \int\limits_1^e x(\ln x)^2 dx$.

Oppgave I-8

Beregn integralet $\int_0^1 xe^{3x^2} dx$.

Oppgave I-9

Beregn integralene

$$\int_0^{1.5} \sin\left(\frac{2\pi\, t}{3}\right) dt \qquad \text{og} \qquad \int_0^{6} \left|\sin\left(\frac{2\pi\, t}{3}\right)\right| dt\ .$$

Oppgave I-10

Funksjonen f er definert ved

$$f(x, y) = x^2 - x^3 - y^2$$

a) Finn de punktene der både $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er null.

b) Avgjør om punktene du fant i a) er lokale maksimums- eller minimumspunkter.

Oppgave I-11

Funksjonen f er gitt ved $f(x, y) = 2x^2y - 2x^2 - y^2$.

a) Finn de kritiske punktene til f.

b) Avgjør om punktene du fant i a) er lokale maksimums- eller minimumspunkter.

Oppgave I-12

La funksjonen f være definert ved

$$f(x, y) = 3 + 3xy - x^3 - y^3 .$$

a) f har ett lokalt ekstrempunkt. Finn dette, og angi om det er et lokalt maksimumspunkt eller et lokalt minimumspunkt for f.

b) På kvadratet K som er definert ved $0 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq 2$, oppnår f en største og en minste verdi. Finn punktene i K hvor dette inntreffer, og de tilsvarende verdiene av f.

Oppgave I-13

Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$g(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

Avgjør for hvert av disse om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum, eller ingen av delene.

Oppgave I-14

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x, y) = xe^{-\frac{1}{2}x^2} \sin(2y) , \qquad x \geq 0 .$$

Bestem de kritiske punktene til f og klassifiser disse.

Oppgave I-15

En rettvinklet boks har sidelengder x, y og z (målt i cm), $x \leq y \leq z$. For å sende boksen i posten må summen $2x + 2y + z$ ikke overstige 354 (cm). For en boks med maksimalt volum må en derfor ha $2x + 2y + z = 354$. Finn det maksimale volumet.

Oppgave I-16

Vi skal bygge en rettvinklet kasse uten lokk. Kassen skal ha sidelengder x og y, og høyde z. Selve "skjelettet" til kassen skal lages av 12 tynne rør og den totale lengden rør vi skal benytte er 56 meter.

a) Begrunn at arealet A av kassens utside (de fire veggene pluss bunnen) som funksjon av x og y kan skrives

$$A(x,y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy,$$

og finn de partielt deriverte av A. Bestem deretter eventuelle punkter (x,y) der begge de partielt deriverte er null, og avgjør om disse punktene er lokale minimumspunkter for A, lokale maksimumspunkter for A eller ingen av delene.

b) Finn maksimumsverdien for $A(x,y)$ på området i xy-planet gitt ved $0 \le x \le 14$, $0 \le y \le 14$. (Du kan her gå ut fra at en slik maksimumsverdi finnes.) Hvordan bør sidelengdene x og y velges for at arealet av kassens utside skal bli størst mulig? (Begrunn svaret.)

Oppgave I-17

a) Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^3$$

og avgjør om de er lokale maksima, minima eller sadelpunkter.

b) La R være området begrenset av x-aksen, y-aksen og linja $y = -x + 1$. Beregn

$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx$$

Oppgave I-18

La D være området i 1. kvadrant gitt ved

$$1 \le x^2 + y^2 \le 4\,, \quad x \ge 0 \quad \text{og} \quad y \ge 0\,.$$

Skisser D. Regn så ut dobbeltintegralet

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\,dy\,.$$

(Det kan være en fordel å bruke polarkoordinater.)

Oppgave I-19

a) Finn volumet innenfor paraboloiden $z = 10 - x^2 - y^2$, utenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 9$, over xy-planet.

b) Skisser det plane området

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x - y \leq 3, 1 \leq 3x + y \leq 3\}$$

Beregn dobbeltintegralet

$$I = \iint_D \ln(x - y)\, dx\, dy$$

Oppgave I-20

a) Beregn det itererte integralet

$$I_1 = \int_0^1 \Big(\int_0^x \frac{xy}{1 + x^4} dy \Big) dx.$$

b) La D være halvsirkelskiven i xy-planet definert ved $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, hvor $a > 0$ er gitt. Beregn dobbeltintegralet

$$I_2 = \iint_D y\, dx\, dy\ .$$

Oppgave I-21

Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{x + y}$$

hvor D er området gitt ved $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq x^2$.

Oppgave I-22

Beregn dobbeltintegralet

$$\int\int_R xy(x + 1)\, dx\, dy$$

der R er området i planet begrenset av de to aksene og linjen $y = 1 - x$.

Oppgave I-23

La $f(x, y) = x^2y - x^2 - y^2 - y$.

a) Bestem de kritiske punktene til $f(x, y)$. Avgjr hvilke av disse som er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

b) La $D = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 10\}$. Beregn $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$.

Oppgave I-24

En funksjon er gitt ved

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^3 - y^3$$

a) Finn de stasjonære punktene til f, og bestem typen av disse.

b) Betrakt området R i xy-planet gitt ved $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Beregn $\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy$.

Oppgave I-25

Beregn dobbeltintegralet

$$\iint\limits_D xy\, dx\, dy$$

hvor D er området i xy-planet definert ved $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

Hva middelverdien av funksjonen$f(x, y) = xy$ over området D ?

Oppgave I-26

La $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3y$

a) Finn den lineære approksimasjonen til $f(x, y)$ i punktet (1,1).

b) Finn de stasjonære punktene til f og bestem deres type.

c) Beregn $\iint\limits_T f(x, y)\, dx\, dy$ der T er trekanten i første kvadrant med hjørner (0,0), (1,0) og (1,1).

Oppgave I-27

La $f(x,y) = (x-1)y + x^2y^3$.

a) Finn de stasjonære punktene til f og bestem deres type.

b) Beregn $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ der D er den delen av enhetsdisken som ligger i første kvadrant, dvs. D er gitt ved at $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x^2 + y^2 \leq 1$.

Oppgave I-28

La $D \subset \mathbb{R}^2$ være den "halve kirkedøra" gitt ved

$$D = \{(x,y)\colon 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}\}$$

Finn tyngdepunktet til D.

Oppgave I-29

Avgjr for hvilke verdier av konstantene a og b vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = (y \ln y + axy, x \ln y + x^2 + bx), \qquad y > 0$$

har et potensial. Finn i dette tilfellet en potensialfunksjon ϕ for $\mathbf{F}$ slik at $\phi(0,1) = 0$.

Oppgave II-1

La V være underrommet av i $\mathbb{R}^5$ som er utspent av følgende sett av vektorer:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1,1,8,0,1) \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0,1,7,3,1) \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1,0,1,-3,0) \\ \boldsymbol{v}_4 &= (2,1,9,-3,1) \end{aligned}$$

Bestem en basis for V med vektorer fra settet. Skriv eventuelle resterende vektorer fra settet som lineære kombinasjoner av basisvektorene.

Oppgave II-2

La $A = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Begrunn at A er inverterbar og bestem A^{-1}.

b) Vis at A er diagonaliserbar og finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for A.

Oppgave II-3

La

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Begrunn at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.

Oppgave II-4

Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestem egenverdiene til A.

b) Begrunn at A er diagonaliserbar og finn en basis for $\mathbb{R}^4$ som består av egenvektorer.

Oppgave II-5

La $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2x_1+4x_2-4x_3\\-x_1+2x_2-x_3\\x_1-2x_2+3x_3\end{bmatrix}$ og la M være standardmatrisen til T.

a) Angi M og finn en basis for nullrommet til M.

b) Begrunn at M er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}MP$ blir en diagonal matrise.

c) Finn M^8.

d) Vis at $N = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\-1 & 2 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ har de samme egenvektorene som M.

Oppgave II-6

La s og t være reelle tall og la A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix}s & 0 & 1 & 0\\0 & s & 0 & 1\\1 & 0 & t & 0\\0 & 1 & 0 & t\end{bmatrix}.$$

a) Avgjør når A er inverterbar.

b) Beregn det karakteristiske polynomet til A.

c) Vi setter nå $s = t = 1$. Begrunn at A er diagonaliserbar og finn en basis for $\mathbb{R}^4$ som består av egenvektorer for A.

Oppgave II-7

La t være et reelt tall og la A_t være matrisen

$$A_t = \begin{bmatrix}1+t & -t & 0\\t & 1-t & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Vis at egenverdiene til A_t er 1 og -1 for alle t og drøft hvordan dimensjonen til egenrommene E_1 og E_{-1} varierer med t. For hvilke verdier av t er A_t diagonaliserbar?

Oppgave II-8

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

b) Finn løsningen av det inhomogene systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y - 8 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 7 \end{cases}$$

som oppfyller $x(0) = 4$ og $y(0) = 1$.

Oppgave II-9

a) Finn den generelle løsningen til systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = x + 2 \end{cases}$$

b) Finn løsningen bestemt av $x(0) = -2$, $y(0) = 1$.

Oppgave II-10

a) Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(Merk: De blir komplekse.)

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 16y - 4 \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y + 9 \end{cases}$$

Oppgave II-11

a) Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn den generelle løsningen til differensiallikningssystemet:

$$(*) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

c) Finn den spesielle løsningen til differensiallikningssystemet $(*)$ med initialbetingelsen $x(0) = 1$ og $y(0) = 2$. Finn også den andre spesielle løsningen som oppfyller $x(0) = 1$ og $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Oppgave II-12

a) Finn egenverdiene til matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Finn den generelle løsningen til differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x. \end{cases}$$

c) Finn den spesielle løsningen av differensiallikningssystemet i b) som oppfyller betingelsen

$$x(0) = 2 \qquad \text{og} \qquad y(0) = 3 \;.$$

Oppgave II-13

Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y \end{cases}$$

med initialverdier $x(0) = 0$ og $y(0) = 3$.

Oppgave II-14

Betrakt differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$$

a) Finn den generelle løsningen til systemet.

b) Finn systemets løsning med initialbetingelsen $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Oppgave II-15

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 9y \end{cases}$$

b) Betrakt så det inhomogene systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x + y - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 9y + 2 \end{cases}$$

Finn systemets likevektstilstand.

c) Løs differensiallikningene i punkt b) under initialbetingelsen $x(0) = \frac{3}{8}$, $y(0) = 0$.

Oppgave II-16

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x' = x - 5y - 1 \\ y' = 5x + y - 5. \end{cases}$$

b) Bestem den løsningen av systemet ovenfor som tilfredstiller initialbetingelsen

$$\begin{aligned} x(0) &= 5 \\ y(0) &= 5. \end{aligned}$$

Oppgave II-17

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

b) Finn løsningen av det inhomogene systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y - 8 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 7 \end{cases}$$

som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = 4$ og $y(0) = 1$.

Oppgave II-18

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

b) Finn den løsningen av systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y - 9 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y - 4 \end{cases}$$

som oppfyller $x(0) = 6$ og $y(0) = 2$.

Oppgave II-19

Finn funksjoner $x(t)$ og $y(t)$ slik at

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -4x \end{cases}$$

og $x(0) = 1$, $y(0) = 4$.

Oppgave II-20

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

b) Finn den løsningen av systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 5y + 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 5 \end{cases}$$

som oppfyller $x(0) = -1$ og $y(0) = -2$.

Oppgave II-21

a) Bestem egenverdiene, og finn tilsvarende egenvektorer for matrisen

$$M = \begin{bmatrix} -k & k \\ \ell & -\ell \end{bmatrix}$$

hvor k og ℓ er positive reelle tall.

En kopp kaffe varmes opp til kokepunktet i en mikrobølgeovn. Deretter slås ovnen av, og kaffen blir stående i ovnen en stund til avkjøling. Vi vil anta at temperaturene $x = x(t)$ i kaffen og $y = y(t)$ i ovnen som funksjoner av tiden, da oppfyller differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k(x-y) \\ \frac{dy}{dt} = \ell(x-y) \end{cases} \tag{1}$$

Når temperaturene er gitt i °C og tiden i timer, antar vi $k = 4.0$, $\ell = 1.0$ (per time).

b) Finn løsningen av systemet (1) med initialbetingelsen $x(0) = 100\,°\mathrm{C}$, $y(0) = 20\,°\mathrm{C}$.

c) Ut fra løsningen av (1), hvilken verdi vil $x(t)$ og $y(t)$ gå mot når $t \to \infty$? Hvor lang tid vil det ta før temperaturen i kaffen er sunket til $55\,°\mathrm{C}$?

Oppgave II-22

Vi tenker oss en insektfelle med to rom, rom 1 og rom 2. Fra omverdenen kommer insektene først inn i rom 1, og noen av dem går videre til rom 2. Fra rom 2 er det mulig å komme tilbake til rom 1, og fra rom 1 er det mulig å forlate fellen.

La $N_1 = N_1(t)$ og $N_2 = N_2(t)$ være antall insekter i hvert av rommene ved tiden t ($t \geq 0$). Insektene går inn i fellen med konstant innstrømningsrate $v = 900$ (per tidsenhet), og går ut igjen med rate bN_1. De går fra rom 1 til rom 2 med rate aN_1, og fra rom 2 til rom 1 med rate bN_2. Dette leder til følgende system av differensiallikninger:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = v - bN_1 - aN_1 + bN_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = aN_1 - bN_2 \end{cases}$$

I det følgende lar vi $a = 81$ (per tidsenhet) og $b = 10$ (per tidsenhet).

a) Etter hvert som tiden går vil antall insekter i de to rommene stabilisere seg på visse likevektsverdier. Finn disse.

b) Finn den generelle løsningen til differensiallikningssystemet.

c) Anta at det ved tiden $t = 0$ er 20 insekter i rom 1, og ingen i rom 2. Hvor mange er det i hvert av rommene ved et vilkårlig tidspunkt t?

Oppgave II-23

Et medikament tilføres blodbanene ved kontinuerlig intravenøs injeksjon og med konstant positiv rate k (mg/h). Vi lar $y = y(t)$ og $x = x(t)$ være mengden av medikament (målt i mg) i henholdsvis blodbane og vev ved tiden t. Medikamentet er av en slik natur at vi under behandlingen kan se bort fra at noe av medikamentet blir utskilt i urinen.

Vi betrakter en modell gitt ved differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_2 x + k_1 y \\ \frac{dy}{dt} = k_2 x - k_1 y + k \end{cases} \tag{1}$$

der k_1 og k_2 er positive konstanter.

a) Avgjør om dette systemet har noen konstant løsning (altså løsninger hvor både x og y er konstante.)

b) Finn den generelle løsningen av det homogene systemet vi får ved å sette $k = 0$ i (1).

c) Vis at det fins konstanter a, b og c slik at funksjonene

$$x(t) = at, \qquad y(t) = bt + c$$

er løsninger av (1).

d) Finn de løsninger av (1) som oppfyller initialbetingelsen

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

<u>Hint</u>: Bruk uten bevis at den generelle løsningen av (1) er summen av løsningen funnet under c) og den generelle løsningen funnet under b).