MAT1012 - Prøveeksamen 29. mai - Løsningsforslag

Oppgave 1

Sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *betegne kolonnevektorene til* A.

a) Skriv $A\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *som en vektorlikning.*

Svar : Siden $A\,\mathbf{x} = [\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + x_3\,\mathbf{v}_3$ kan vi skrive

$A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som vektorlikningen $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + x_3\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$.

Begrunn at systemet er konsistent og angi $\mathbf{b}$ *som en lineær kombinasjon av* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Svar: Siden den reduserte trappeformen til den utvidede matrisen til systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er oppgitt til å være

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ser vi at systemet har (en entydig) løsning, nemlig $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4$.

Dermed er systemet konsistent og $\mathbf{b} = 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 4\,\mathbf{v}_3$.

b) Begrunn at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *er lineært uavhengig og at* A *er inverterbar.*

Svar : At $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengig betyr det samme som at systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare har den trivielle løsningen.

Fra den oppgitte red. trappeformen ser vi at den reduserte trapperformen til matrisen $[A\ \mathbf{0}]$ er $[I\ \mathbf{0}]$. Det gir at $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare har den trivielle løsningen, og dermed at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengig.

Fra IMT kan vi da konkludere med at A er inverterbar.

Alternativt: Utregning gir at $\det A = 4 \neq 0$, så A er inverterbar. Fra IMT kan vi da konkludere med at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengig.

c) Finn en basis for $\text{Nul}(A - 2I)$*.*

Svar : Vi har at

$$[A - 2I\ \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så

$$\text{Nul}(A - 2I) = \{ \begin{bmatrix} 2s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

dvs at $\text{Nul}(A - 2I) = \text{Span}\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

Siden $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ opplagt ikke er multiple av hverandre er disse vektorene lineært uavhengige (noe vi vet vil skje automatisk her).

Dermed danner disse to vektorene en basis for $\text{Nul}(A - 2I)$.

d) Begrunn at A *er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise* P *som er slik at* $P^{-1}AP$ *blir diagonal.*

Svar :

Det vi har funnet i punkt c) betyr at 2 er en egenverdi til A og at $\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ er en basis for det tilhørende egenrommet E_2.

Utregning gir at det karakteristiske polynomet til A er

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 .$$

Dermed er 1 den andre egenverdien til A.

Utregning gir at $E_1 = \text{Nul}(A - I) = \ldots = \text{Span}\{(1, 1, 2)\}$.

Matrisen $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ er da inverterbar (dette kan vi sjekke ved å regne ut at $\det P = \ldots = 1 \neq 0$), og består av egenvektorer for A. Dermed vil

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dvs at A er diagonaliserbar og P diagonaliserer A.

e) Finn den generelle løsningen av 1. ordens diff.likningsystemet

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \textit{der } \mathbf{c} = (0, 2, 0)\,.$$

Svar : I *d*) har vi funnet P og D som diagonaliserer A. Det gir at den generelle løsningen til det homogene systemet $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ er gitt ved

$$\mathbf{y}(t) = C_1\,e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\,e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3\,e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

der $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Vi har sett at A er inverterbar. Likevektspunktet $\mathbf{x}_l = A^{-1}(\mathbf{c})$ til systemet er den entydige løsningen av likningen $A\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, dvs $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $\mathbf{b} = (0, -2, 0)$.

Fra a) får vi at $\mathbf{x}_l = (2, 1, 4)$. (Merk at det er altså unødvendig å regne ut A^{-1} for å regne ut $\mathbf{x}_l = A^{-1}(\mathbf{c})$ ved hjelp av det).

Dermed er den generelle løsningen av $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{c}$ gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}_l = C_1\,e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\,e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3\,e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

der $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Oppgave 2

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (5x - 2y, -2x + 2y)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

a) Begrunn at $\mathbf{F}$ *er konservativt og finn potensialfunksjonen* ϕ *for* $\mathbf{F}$ *som er slik at* $\phi(2, 2) = 6$.

Svar : Vi har at curl $\mathbf{F} = -2 - (-2) = 0$, så $\mathbf{F}$ er konservativt.

Vi vet da at det fins en potensialfunksjon ϕ slik at $\nabla\phi = \mathbf{F}$, dvs slik at

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = 5x - 2y\,,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y\,.$$

Første likning gir $\phi(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 2xy + C(y)$.

Da må $\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = -2x + C'(y)$.

Andre likning gir da $C'(y) = 2y$, dvs $C(y) = y^2 + D$ for en konstant D.

Tilsammen gir dette at en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$ er
  $\phi(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 2xy + y^2 + D$, der D er en konstant.

Betingelsen $\phi(2,2) = 6$ gir $10 - 8 + 4 + D = 6$, dvs $D = 0$.

Altså er $\phi(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 2xy + y^2$ den ønskede potensialfunksjonen.

b) Sjekk at punktene $(-2,-2)$ og $(2,2)$ ligger på samme nivåkurve for ϕ.

Svar: Vi har at $\phi(-2,-2) = 10 - 8 + 4 = 6$ så $(2,2)$ og $(-2,-2)$ ligger begge på nivåkurven $\phi(x,y) = 6$.

La så C være kurven som går i rett linje fra $(-2,-2)$ til $(2,2)$.
Beregn linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C.

Svar : Siden $\mathbf{F} = \nabla\phi$ har vi at

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_C\,dt = \phi(2,2) - \phi(-2,-2) = 6 - 6 = 0\,.$$

c) La Ω betegne området i xy-planet som begrenses av trekanten med hjørner i $(-2,-2), (-2,2)$ og $(2,2)$.

Beskriv Ω som et område av type I og beregn $\iint_\Omega \phi(x,y)\,dxdy$.

Svar : $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le 2\,,\ -2 \le x \le 2\}\,.$

$$\iint_\Omega \phi(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{2}\int_{x}^{2} \big(\frac{5}{2}x^2 - 2xy + y^2\big)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} \big(\frac{5}{2}x^2\,y - xy^2 + \frac{y^3}{3}\big)\,\Big|_{y=x}^{y=2}\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \big(5x^2 - 4x + \frac{8}{3} - \frac{5}{2}x^3 + x^3 - \frac{x^3}{3}\big)\,dx = \cdots = \frac{5}{3}\cdot 16 + \frac{8}{3}\cdot 4 = \frac{112}{3}\,.$$

Oppgave 3

En 2×2 reell matrise A har en kompleks egenvektor $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{bmatrix}$ *som tilhører egenverdien* $\lambda = \frac{1}{6}(3+4i)$.

Begrunn først at $A^n\,\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ *når* $n \to \infty$ *dersom* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *eller* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Begrunn deretter at dette holder for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Svar : Vi har da at $\overline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{bmatrix}$ er en kompleks egenvektor til A som tilhører egenverdien $\overline{\lambda} = \frac{1}{6}(3-4i)$.

Anta at $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da er $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{z} + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{z}}$. Dermed er

$$A^n\,\mathbf{x} = A^n(\frac{1}{2}\,\mathbf{z} + \frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}\,A^n\,\mathbf{z} + \frac{1}{2}\,A^n\,\overline{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}\,\lambda^n\,\mathbf{z} + \frac{1}{2}\,\overline{\lambda}^n\,\overline{\mathbf{z}}\,.$$

Nå er $|\lambda| = \frac{1}{6} \cdot |3+4i| = \frac{5}{6} < 1$. Dermed vil $|\lambda^n| = |\lambda|^n \to 0$ når $n \to \infty$.
Det gir at $\lambda^n \to 0$ når $n \to \infty$.
Siden $|\overline{\lambda}| = |\lambda| < 1$ får vi tilsvarende at $\overline{\lambda}^n \to 0$ når $n \to \infty$.
Dette gir at

$$A^n\,\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,\lambda^n\,\mathbf{z} + \frac{1}{2}\,\overline{\lambda}^n\,\overline{\mathbf{z}} \to \mathbf{0} \text{ når } n \to \infty\,.$$

Anta så at $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Da er $\mathbf{x} = \frac{1}{2i}\,\mathbf{z} - \frac{1}{2i}\,\overline{\mathbf{z}}$.
En tilsvarende argumentasjon gir at $A^n\,\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ når $n \to \infty$.

La nå $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Det er klart at $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ gir en basis for $\mathbb{R}^2$, så det finnes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ slik at

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\,.$$

Dette gir at

$$A^n\,\mathbf{x} = A^n\Big(c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\Big) = c_1\,A^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,A^n \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \to c_1\,\mathbf{0} + c_2\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

når $n \to \infty$.

Ekstraoppgave :

Finn matrisen A i Oppgave 3.

Svar: Sett $P = \begin{bmatrix} \mathbf{z} & \overline{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-i & 2+i \\ 1+3i & 1-3i \end{bmatrix}$.

Kolonnene til P består da av to komplekse egenvektorer for A tilhørende de to forskjellige egenverdiene til A.

Så P vil diagonalisere A, dvs

$$A = P \left(\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{bmatrix} \right) P^{-1} .$$

Nå er $\det(P) = (2-i)(1-3i) - (2+i)(1+3i) = -14\,i$,

så

$$P^{-1} = \frac{1}{-14i} \begin{bmatrix} 1-3i & -(2+i) \\ -(1+3i) & 2-i \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3+i & 1-2i \\ 3-i & 1+2i \end{bmatrix} .$$

Dermed er

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & 2+i \\ 1+3i & 1-3i \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{bmatrix} \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3+i & 1-2i \\ 3-i & 1+2i \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} -50 & 40 \\ -80 & 34 \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} -25 & 20 \\ -40 & 17 \end{bmatrix} .$$