MAT1012 – Prøveeksamen – V2011 – Fasit

Oppgave 1

a) $\operatorname{curl}(\mathbf{F})(x,y) = y - 2y = -y$. Siden sirkulasjonen ikke er konstant lik 0, er feltet ikke konservativt.

b) Utregning av $L = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds$ gir

$$L = \int_{-1}^{1} \Big(e^{-(1-t^3)^3} + (1-t^3)^2 \Big)(-3t^2) + (1-t^3)(1-t^2)(-2t)\, dt = -(K + \frac{8}{35})$$

der $K = \int_0^2 e^{-u^3}\, du$.

Funksjonen $f(u) = e^{-u^3}$ har (dessverre) ingen antiderivert som kan skrives som en elementær funksjon, og K må approksimeres numerisk. Simpsons formel (med delepunktene $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2$) gir

$$K \simeq \frac{1}{3}(f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{1}{3}\big(1 + \frac{4}{e} + \frac{1}{e^8}\big) \simeq 0,824\,.$$

Dermed blir $L \simeq -(0,824 + \frac{8}{35}) \simeq -1,05$.

c) Utregning gir at buelengden av C er

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = 2\int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\, dt = \frac{2}{27}(13\sqrt{13} - 8)\,.$$

d) Punktene (x,y) på C tilfredstiller at $y = 1 - (1-x)^{2/3}$. Dermed er arealet av R lik

$$A = \int_0^2 1 - (1-x)^{2/3}\, dx = \frac{4}{5}\,.$$

Alternativt kan A beregnes som en anvendelse av Greens teorem, f.eks. ved $A = \int_{C'} x\, dy$, der C' er randkurven til R (gjennomgt̂ mot klokka). Kurven C' består av kurven C, etterfulgt av kurven C_1 som er parametrisert ved $x = t, y = 0$, der $0 \leq t \leq 2$. Utregning av $A = \int_C x\, dy + \int_{C_1} x\, dy$ gir

$$A = \int_{-1}^{1} (1-t^3)(-2t)\, dt + \int_0^2 t \cdot 0\, dt = \frac{4}{5} + 0 = \frac{4}{5}\,.$$

e) Siden R er symmetrisk om linjen $x = 1$ er $\bar{x} = 1$. Videre er

$$\iint_R y\, dxdy = \int_0^2 \int_0^{1-(1-x)^{2/3}} y\, dy\, dx = \frac{62}{85}\,.$$

Dermed er $\bar{y} = \frac{1}{4/5}\frac{62}{85} = \frac{31}{14}$. (Man kan beregne $\bar{x}$ på tilsvarende måte hvis man ikke har merket seg at R er symmetrisk om $x = 1$).

Oppgave 2

a) Utregning gir $A\,\mathbf{u} = \mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u}$, så $\mathbf{u}$ er en egenvektor for A tilhørende egenverdien 1. Videre er

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)\,,$$

så egenverdiene til A er 1 og $\pm\,i$.

b) Finner at en egenvektor for A tilhørende egenverdien $\lambda = i$ er f.eks. $(1, i, -1)$. En kompleks egenfunksjon for systemet $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ er derfor

$$\mathbf{z}(t) = e^{it}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Generell løsning av systemet blir dermed

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Løsningen som tilfredstiller $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$ svarer til $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 0$, dvs

$$x_1(t) = e^t - \cos t\,,\ x_2(t) = e^t + \sin t\,,\ x_3(t) = e^t + \cos t.$$

c) Siden $\det([\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]) = 2 \neq 0$, gir IMT at $\{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Finner videre at vektorlikningen $c_1\,\mathbf{u} + c_2\,\mathbf{v} + c_3\,\mathbf{w} = \mathbf{b}$ har løsningen $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = -2$. Dermed er $\mathbf{b} = 2\,\mathbf{u} -\ \mathbf{v} - 2\,\mathbf{w}$.

d) Vi vet at $A\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$, så $A^n\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$ for enhver $n \in \mathbb{N}$. Utregning gir $A\,\mathbf{v} = -\mathbf{w}\,,\ A\,\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Dermed blir $A^4\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $A^4\,\mathbf{w} = \mathbf{w}$, så

$$A^{101}\,\mathbf{v} = A\,(A^4)^{25}\,\mathbf{v} = A\,\mathbf{v} = -\mathbf{w}, \quad A^{101}\,\mathbf{w} = A\,(A^4)^{25}\,\mathbf{w} = A\,\mathbf{w} = \mathbf{v}\,.$$

Det gir

$$A^{101}\,\mathbf{b} = 2\,A^{101}\,\mathbf{u} -\ A^{101}\,\mathbf{v} - 2\,A^{101}\,\mathbf{w} = 2\,\mathbf{u} +\ \mathbf{w} - 2\,\mathbf{v} = (0, 3, 4)\,.$$

Vi ser fra utregning ovenfor at A^4 fikserer alle basisvektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, og da vil $A^4 = I$, noe som kan lett sjekkes ved utrening. Dermed er

$$A^{101} = A\,(A^4)^{25} = A\,I^{25} = A\,.$$

Oppgave 3

Vi har at $\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$ der $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Siden $\det(A) = 18 \neq 0$ er A inverterbar og systemet har derfor et entydig likevektspunkt $\mathbf{c}$ gitt ved

$$\mathbf{c} = A^{-1}(-\mathbf{b}) = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Utregning gir at egenverdiene til A er -3 og -6. Begge disse har negativ realdel, og vi vet at da er systemet stabilt (jf. siste teorem i MLA).