MAT1012 – Prøveeksamen – Våren 2011

Oppgave 1

Betrakt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-x^3} + y^2, xy)$ i xy-planet.

a) Beregn sirkulasjonen $\operatorname{curl}(\mathbf{F})$. Er feltet konservativt?

La nå C være kurven i xy-planet som er parametrisert ved

$$x = 1 - t^3\,,\; y = 1 - t^2\,, \quad \text{der } -1 \leq t \leq 1\,.$$

b) Beregn linjeintegralet av F langs C.

c) Beregn buelengden av C.

d) La R være det lukkede området i xy-planet som avgrenses av kurven C ovenfra og av x-aksen fra 0 til 2 nedenfra.
Beregn arealet av R. Gjør det helst på to forskjellige måter.

e) Bestem koordinatene til tyngdepunktet til området R.

Oppgave 2

Sett $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Sjekk at $\mathbf{u}$ er en egenvektor for A. Bestem deretter de reelle og komplekse egenverdiene til A.

b) Finn løsningen av differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

som tilfredstiller initialbetingelsen $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$.

c) Sett $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Begrunn at $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.
Skriv deretter $\mathbf{b} = (1, 0, 3)$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

d) Beregn $A^{101}\,\mathbf{b}$. Hva med A^{101} ?

Oppgave 3

Betrakt differensiallikningssystemet $\left\{ \begin{aligned} x_1' &= -5\,x_1 + 2\,x_2 + 1 \\ x_2' &= x_1 - 4\,x_2 + 7 \end{aligned} \right.$.

Begrunn at systemet har et entydig likevektspunkt $\mathbf{c}$ og bestem $\mathbf{c}$. Begrunn deretter at systemet er stabilt, dvs at enhver løsning $\mathbf{x}(t)$ av systemet vil nærme seg $\mathbf{c}$ når $t \to \infty$.