FORMELSAMLING FOR MAT 1001 og MAT 1012

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln(x^a) = a \ln x$

Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $n \neq -1$ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,\ x > 0$

$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ spesielt $\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Generelle: $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

Bestemte integraler: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Differens- og differensialligninger

Første ordens differensligning, $x_n = kx_{n-1}$: $x_n = Ck^n$

Første ordens differensialligning, $y' + f(x)y = g(x)$:

$$y(x) = e^{-\int f\,dx} \int e^{\int f\,dx} g(x)\,dx$$

Andre ordens differensligning, $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$:

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C\rho^n \cos(n\theta) + D\rho^n \sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

Andre ordens differensialligning, $y'' + py' + qy = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
Kompleks konjugert: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$
De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Funksjoner av flere variable

Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$
Kjerneregel: For $h(t) = f(\mathbf{x}(t))$,

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_n'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$$

Annenderiverttest: Anta at (a,b) er et stajonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$, $D = AC - B^2$. Da gjelder

i) Hvis $D < 0$, er (a,b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a,b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a,b) et lokalt maksimum.

Numeriske formler

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Trapesmetoden: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$
$+ 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$

Simpsons formel: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$
$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)$

Vektorregning

Vektorprodukt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Regneregler for determinanter:

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(A^T) = \det(A)$

Matriser og lineæravbildninger

Matrisen til en lineæravbildning T: $A = (\mathbf{T}(\mathbf{e}_1), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n))$
Betingelse for egenverdi: $\det(\lambda I_n - A) = 0$
Invers matrise: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Tangent: $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$
Buelengde: $s = L(a,b) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
Linjeintegral av skalarfelt: $\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\ dt$
Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}_C(t)\ dt$
Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$
Sirkulasjon av plant vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$: $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Multiple integraler

Polarkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $\iint_{D(x,y)} f\, dx\, dy = \iint_{D(r,\theta)} f r\, dr\, d\theta$
Areal og tyngdepunkt: $A = \iint_D 1\, dx\, dy$

$$\overline{x}A = \iint_D x\, dx\, dy \qquad \overline{y}A = \iint_D y\, dx\, dy$$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\ dx + Q\ dy$

System av differensiallikninger

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Reelle røtter: λ_1 og λ_2, egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + D\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

Komplekse røtter: $\lambda = a \pm ib$, egenvektorer $\mathbf{v}$ og $\overline{\mathbf{v}}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at}\big(\mathrm{Re}(\mathbf{v})(C\cos bt + D\sin bt) + \mathrm{Im}(\mathbf{v})(D\cos bt - C\sin bt)\big)$$