Oblig 1 - vår 2015
MAT1012

MARI RØYSHEIM
University of Oslo, Department of Physics
17. februar 2015

Med forbehold om trykkfeil og andre feil!

Oppgave 1

a)

Vi skal finne det bestemte integralet, og bruker substitusjon.
Gitt $f(x) = xe^{-x^2}$, substituerer vi $u = -x^2$, slik at

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(-x^2\right) = -2x \\ xdx &= -\frac{1}{2}du \end{aligned}$$

De opprinnelige grensene var $[0, 0.5]$, men disse endres ved variabelbyttet:

$$x = 0 \rightarrow u = 0 \quad x = 0.5 \rightarrow u = -(0.5)^2 = -0.25$$

De nye grensene blir derfor $[0, -0.25]$. Integralet blir da:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{0}^{0.5} f(x)dx &= \int\limits_{0}^{0.5} xe^{-x^2}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-0.25} e^u du \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{-0.25}^{0} e^u du \\
&= \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_{-0.25}^{0} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-0.25}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-0.25}\right) \\
&= 0.1106
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt at vi kan snu om på integralgrensene ved å la integralet få negativ verdi, altså at

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

b)

Trapesmetoden tilnærmer funksjonen med ei rett linje mellom to punkter. Vi skal bruke denne metoden for å finne en tilnærmet verdi på integralet. Intervallet $[a,b] = [0,0.5]$ skal deles opp i $n = 2$ like store deler. Hver del av intervallet blir da:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{2} = 0.25$$

Dermed får vi tre punkter å evaluere funksjonen vår i:

$$a_0 = 0, a_1 = 0.25, a_2 = 0.5$$

Trapesmetoden gir da følgende estimat av integralverdien S:

$$
\begin{aligned}
S &= \left[\frac{1}{2}f(a_0) + f(a_1) + \frac{1}{2}f(a_2)\right]\Delta x \\
&= \left[\frac{1}{2}f(0) + f(0.25) + \frac{1}{2}f(0.5)\right]\Delta x \\
&= \left[0 + \frac{1}{4}e^{-(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{-(\frac{1}{2})^2}\right]\cdot 0.25 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{-\frac{1}{16}} + e^{-\frac{1}{4}}\right) \\
&= 0.1074
\end{aligned}
$$

c)

Simpsons metode er en annen metode som brukes for å finne tilnærmede integralverdier. I motsetning til trapesmetoden som kun gjør en lineær tilnærming, tilpasser Simpsons metode med et andregradsuttrykk. Dette er ikke lett å se fra uttrykket i kompendiet, men det er altså dette prinsippet som ligger bak.

$$\begin{aligned}
S = &(f(a_0) + 4f(a_1) + f(a_2))\frac{1}{3}\Delta x \\
=&\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(0 + 4\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}\right) \\
=&\frac{1}{12}\left(e^{-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}\right) \\
=&0.1107
\end{aligned}$$

d)

Polynomer er enkle saker å integrere, og derfor er det ofte litt smart å rekkeutvikle kompliserte funksjoner som et Taylorpolynom, for deretter å integrere denne tilnærmingen (som da kun blir en sum av ulike grader av x). Da trenger vi å vite funksjonens deriverte. Vi skal finne Taylorpolynomet av tredje grad, om punktet 0. Det betyr at a i uttrykket under settes lik 0. Taylorpolynomet av 3. grad om punktet a, er gitt ved:

$$T_3 = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3$$

Vi regner ut de deriverte:

$$\begin{aligned}
f'(x) =&e^{-x^2} + xe^{-x^2}\cdot(-2x) \\
=&e^{-x^2}(1-2x^2) \\
f''(x) =&e^{-x^2}(1-2x^2)' + (1-2x^2)e^{-x^2}(-2x) \\
=&e^{-x^2}\left((-4x) - 2x(1-2x^2)\right) \\
=&e^{-x^2}(4x^3 - 6x) \\
f'''(x) =&e^{-x^2}(4x^3-6x)' + (4x^3-6x)e^{-x^2}(-2x) \\
=&e^{-x^2}\left(12x^2 - 8x^4 + 12x^2\right) \\
=&e^{-x^2}(-8x^4 + 24x^2 - 6)
\end{aligned}$$

Vi må ha funksjonsverdien for de deriverte i punktet $a = 0$:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -2 - 4 = -6$$

Dermed får vi Taylorpolynomet

$$T_3 = x - x^3$$

Vi kan integrere dette polynomet som en tilnærmelse til den faktiske funksjonen:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{0.5} (x - x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{0.5} \\ &= 0.1094 \end{aligned}$$

e)

Vi skal avgjøre om de estimerte verdiene vi har funnet tidligere ligger innenfor feilmarginen som de ulike metodene gir. Vi har oppgitt at

$$|f''(x)| \leq 3, |f''''(x)| \leq 20$$

Det betyr at verdien K maksimalt er henholdsvis 3 og 20.
Vi finner avviket ved å sammenlikne eksakt verdi ($=0.1106$ fra a), og den estimerte verdien for de tre ulike metodene:

$$\Delta S = |\text{eksakt} - \text{estimat}|$$

Trapesmetoden gir et feilestimat

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{3 \cdot 0.5^3}{12 \cdot 2^2} = 0.0078$$
$$\Delta S = [0.1106 - 0.1074] = 0.0032 < E_T$$

Simpsons metode gir et feilestimat

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4} = \frac{20 \cdot 0.5^5}{180 \cdot 2^4} = 0.0002$$
$$\Delta S = |0.1106 - 0.1107| = 0.0001 < E_S$$

Taylortilnærminga gir et feilestimat

$$E_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Siden vi har et tredjegrads Taylorpolynom, ønsker vi å finne feilen som hører til dette, altså E_3. Da setter vi $n = 3$ i uttrykket. Videre velger vi å se på intervallet [0,0.5], og vi vet da at den fjerdederiverte på dette intervallet maksimalt er 20. Det betyr at størrelsen $f^{(4)}(c)$ maksimalt er 20. Vi maksimerer feilen vi gjør, og får uttrykket

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{f^4(c)}{4!}x^4 \\ &\leq \frac{20}{4!}x^4 \\ &\leq \frac{5}{6}x^4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_3 \leq & \int_0^{0.5} \frac{5}{6} x^4 dx \\
= & \left[\frac{1}{6} x^5 \right]_0^{0.5} \\
= & \frac{0.5^5}{6} \\
= & 0.0052
\end{aligned}
$$

$$\Delta S = |0.1106 - 0.1094| = 0.0012 < E_3$$

Feilen vi gjør ligger dermed innenfor feilmarginen i alle tre tilfeller.

Oppgave 2

a)

Vi bruker delvisintegrasjon med følgende substitusjoner

$$u = x, u' = 1, v' = e^{-x}, v = -e^{-x}$$

Husker at

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Da får vi for integralet

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = & \Big[- xe^{-x} \Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x} dx \\
= & \Big[- xe^{-x} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\
= & \Big[- xe^{-x} - e^{-x} \Big]_0^{\infty} \\
= & (0 - e^{-\infty}) - (0 \cdot e^0 - e^0) \\
= & (0 - 0) - (0 - 1) \\
= & 1
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt det oppgaveteksten tillater oss å anta; nemlig at $lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$.

b)

Vi skal finne arealet mellom kurvene til $y(x) = xe^{-x}$ og $g(x) = xe^{-x^2}$. Vi ønsker å finne hvor de skjærer hverandre, og vil derfor finne ut når de to uttrykkene er like.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
xe^{-x} &= xe^{-x^2}
\end{aligned}
$$

Her har vi likhet dersom $x = 0$, eller (ved å dele på x) dersom

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= e^{-x^2} \\
-x &= -x^2 \\
x &= x^2
\end{aligned}
$$

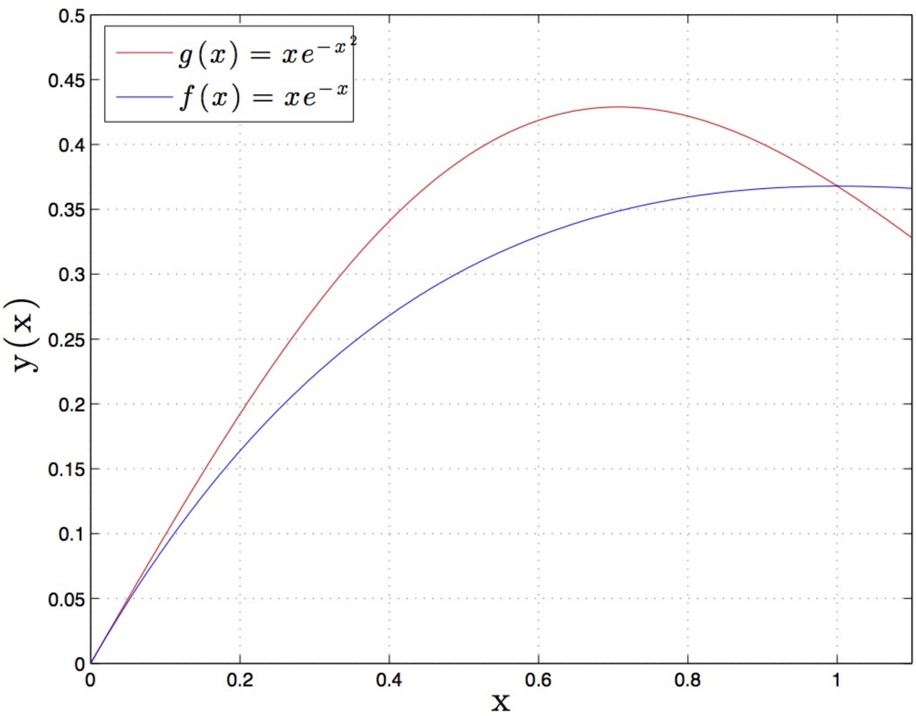
Denne likheten gjelder dersom $x = 1$ og $x = 0$ ($x = 0$ har vi også funnet tidligere). Derfor skjærer de to kurvene hverandre i disse punktene. For å finne arealet mellom dem, må vi finne ut hvilken av de to kurvene som har den største verdien på intervallet $[0, 1]$.

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\
e^{-x^2} &= \frac{1}{e^{x^2}}
\end{aligned}
$$

For $x < 1$, har vi $x^2 < x$. Det betyr at nevneren i $g(x)$ vil være mindre enn nevneren i $f(x)$. Det betyr igjen at vi deler på noe som er mindre i $g(x)$ enn i $f(x)$, som igjen betyr at $g(x)$ har den største verdien. Dette argumentet gjelder på hele intervallet $[0, 1]$, og derfor er $g(x)$ den kurven som ligger øverst. Dette ser vi også i figur 1.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx \\
&= \int_0^1 \left(xe^{-x^2} - xe^{-x}\right) dx \\
&= \int_0^1 xe^{-x^2} dx - \int_0^1 xe^{-x} dx
\end{aligned}
$$

Disse integralene har vi allerede regnet ut i henholdsvis 1a og 2a. Bruker resultatene derifra, men husker at vi har andre grenser.



Figur 1: Skal finne arealet av området innesluttet av de to grafene.

$$
\begin{aligned}
A =& \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_{-1}^{0} - \Big[-xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^1 \\
=& \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-1}\right) - \left((-1\cdot e^{-1} - e^{-1}) - (0 - e^0)\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right) - \left(-2e^{-1} + 1\right) \\
=& \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1} + 2e^{-1} - 1 \\
=& \frac{3}{2e} - \frac{1}{2} \\
=& 0.0518
\end{aligned}
$$

c)

Vi skal skrive om rekka som en sum. Da må vi prøve å finne et mønster, og selv om det kan virke tungvint, så er det ofte lurt å skrive enkle ting på litt kompliserte måter, fordi man da lettere kan øyne mønstre. Et eksempel kan være å skrive 2^0 i stedenfor 1, eller $\frac{1}{3^{-1}}$ heller enn 3. Noen har sikkert evnen til å se hvordan summen må være uten å være like omstendelige, men jeg liker å gå systematisk til verks. Da synes hvertfall jeg det blir enklere å se mønsteret man er på jakt etter.

$$
\begin{aligned}
S_n =& 3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + ... \\
=& \frac{3}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 2}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3} + ... \\
=& \frac{1}{3^{-1}} + \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 2}{3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3} + ... \\
=& \frac{2^0}{3^{-1}} + \frac{2^1}{3^0} + \frac{2^2}{3^1} + \frac{2^3}{3^2} + ... \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n 3^{-1}} \\
=& 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \\
=& 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}
$$

Siden rekka er geometrisk, vet vi at forholdet mellom leddene er konstant, og vi kan finne dette forholdet

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}$$

Fordi $k < 1$, vil rekka konvergere, og finner summen ved

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{3}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{1/3} = 9$$