MAT 1012, Oblig 2

Innleveringsfrist: Torsdag 23. april 2015, kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1012). Oppgaven leveres i kassen i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen. Det kreves 60% riktig svar for å få obligen godkjent.

Oppgave 1

La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(x, y, z) = x - \sqrt{3}y - \sqrt{5}z$$

og la $N(T)$ være nullrommet til T, dvs

$$N(T) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; T(x, y, z) = 0\}$$

a) Finn en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ som står ortogonalt på alle $\mathbf{v} \in N(T)$.
b) Finn en basis $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ for $N(T)$.
c) Beregn $pr_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$ og $\mathbf{w}^{'} = \mathbf{w} - pr_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})$. Hva er vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}^{'}$?
d) Bruk opplysningene over til å finne en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ for $\mathbb{R}^3$ slik at $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en basis for $N(T)$.
e) Finn en ortogonal matrise M slik at $M\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$, $M\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2$ og $M\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3$ (standard basis i $\mathbb{R}^3$).
f) Finn koeffisienter a_1, a_2, a_3 slik at $\mathbf{e}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3$.

Oppgave 2

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + x, x^2 - y^2 - y)$.

a) Vis at $\mathbf{F}$ er konservativt og finn $f(x, y)$ slik at $\mathbf{F} = \nabla f$.
b) Finn de kritiske punktene til $f(x, y)$.
c) Bestem typen av de kritiske punktene.
d) Finn en familie av kurver på ligningsform (dvs. $g(x, y) = C$) som er integralkurver for $\mathbf{F}$. Vis at

$$y = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + \frac{4}{3}x^2} - 1)$$

er (en del av) en slik kurve.
e) La C være kurven over for $0 \leq x \leq \sqrt{6}$. Beregn kurveintegralet av $\mathbf{F}$ langs C.
f) Hva er det tilsvarende integralet for $\mathbf{F}^{\perp}$?