MAT1012 V17: Obligatorisk oppgave 2. Løsningsforslag

Oppgave 1: a) Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \cdot \sin(x-y) + x\cos(x-y) = \sin(x-y) + x\cos(x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\cos(x-y)\cdot(-1) = -x\cos(x-y)$$

som gir

$$\nabla f(x,y) = (\sin(x-y) + x\cos(x-y), -x\cos(x-y))$$

b) Gradienten peker i den retningen der funksjonen vokser raskest. Siden

$$\nabla f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})) = \left(\sin 0 + \frac{\pi}{4}\cos 0, -\frac{\pi}{4}\cos 0\right) = \frac{\pi}{4}(1,-1)$$

vokser funksjonen raskest i retningen $(1,-1)$. (Som svar er $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ like riktig, men litt mer uryddig.)

Oppgave 2: a) Vi har $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \sqrt{t^2+1}\,dt$, så

$$I = \int_C y\,ds = \int_0^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

Vi innfører en ny variabel $u = t^2 + 1$, og får $du = 2t\,dt$. De nye grensene er $u(0) = 1$, $u(2) = 5$. Dermed er

$$I = \int_1^5 \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^5 u^{\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

b) Vi har $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, så

$$I = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t\sin t, \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos t\sin^2 t + \cos t\sin t\right)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin^2 t + \sin t\right)\cos t\,dt$$

Innfører vi en ny variabel $u = \sin t$, får vi $du = \cos t\,dt$. De nye grensene er $u(0) = 0$ og $u(\frac{\pi}{2}) = 1$, og dermed har vi

$$I = \int_0^1 (-u^2 + u)\,du = \left[-\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{0}{3} + \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Oppgave 3: a) Vi har

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y + 1) - \frac{\partial}{\partial y}(e^y + 2x) = e^y - e^y = 0$$

b) Ifølge a) er $\mathbf{F}$ et konservativt vektorfelt. En potensialfunksjon f må oppfylle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + 2x \implies f(x,y) = xe^y + x^2 + g(y)$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + 1 \implies f(x,y) = xe^y + y + h(x)$$

Disse betingelsen er oppfylt når $f(x,y) = xe^y + x^2 + y$.

c) Kurven starter i $(0,0)$ og ender i $(1,1)$. Dermed er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = f(1,1) - f(0,0) = (e+2) - 0 = e + 2$$

Oppgave 4: a) Hvis du prøver å skissere kurven, ser du at den er en lukket kurve som starter og ender i origo. Dermed er

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r(\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

Dette integralet kan vi løse enten ved to gangers delvis integrasjon eller ved å bruke formelen $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ på formelarket. Velger den siste varianten:

$$A = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\left(\pi - 0 - (0 - 0)\right) = \frac{\pi}{4}$$

b) Ganger vi ligningen $r = \sin\theta$ med r, får vi $r^2 = r\sin\theta$. Siden $r^2 = x^2 + y^2$ og $r\sin\theta = y$, gir dette ligningen $x^2 + y^2 = y$, som også kan skrives $x^2 + y^2 - y = 0$. Fullfører vi kvadratet i y, får vi

$$x^2 + y^2 - y = x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 ,$$

så ligningen kan også skrives

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Dette er ligningen for en sirkel med sentrum i $(0, \frac{1}{2})$ og radius $\frac{1}{2}$.