Eksamen i MAT1012 V-17: Løsningsforslag

Oppgave 1. a) Vi har

$$\iint_R 3x^2y\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_1^2 3x^2y\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[x^3y\right]_{x=1}^{x=2} dy$$
$$= \int_0^1 7y\,dy = \left[\frac{7}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{7}{2}$$

b) Vi får

$$\iint_A 2xy\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} 2xy\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[xy^2\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 x^5\,dx = \frac{1}{6}$$

Oppgave 2. a) De partiellderiverte er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - 2y = 2y(x-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2x + y$$

For å finne de stasjonære punktene må vi løse ligningssettet

$$2y(x-1) = 0 \qquad (1)$$
$$x^2 - 2x + y = 0 \qquad (2)$$

Ligning (1) har løsningene $x = 1$ og $y = 0$. Setter vi $x = 1$ inn i (2), får vi $1^2 - 2\cdot 1 + y = 0$, som gir $y = 1$. Altså er $(1,1)$ et stasjonært punkt. Setter vi isteden $y = 0$ inn i (2), får vi $x^2 - 2x = 0$, som har løsningene $x = 0$ og $x = 2$. Dermed er også $(0,0)$ og $(2,0)$ stasjonære punkter.

b) Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2(x-1)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 1$, har vi generelt

$$D = \begin{vmatrix} 2y & 2(x-1) \\ 2(x-1) & 1 \end{vmatrix} = 2y - 4(x-1)^2$$

For de stasjonære punktene får vi dermed:

Punktet $(1,1)$: Vi har $D = 2\cdot 1 - 4(1-1)^2 = 2 > 0$ som viser at dette er enten et lokalt maksimum eller et lokalt minimum. Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0$, har vi et lokalt minimum i $(1,1)$.

Punktet $(0,0)$: Vi har $D = 2\cdot 0 - 4(0-1)^2 = -4 < 0$ som viser at $(0,0)$ er et sadelpunkt.

Punktet $(2,0)$: Vi har $D = 2\cdot 0 - 4(2-1)^2 = -4 < 0$ som viser at også $(2,0)$ er et sadelpunkt.

Oppgave 3. a) Vi har

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x \qquad\qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$$

Siden feltet er definert i hele $\mathbb{R}$, betyr dette at $\mathbf{F}$ er konservativt. En potensialfunksjon ϕ må oppfylle

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = 2xy + 2x \Longrightarrow \phi(x,y) = x^2y + x^2 + C(y)$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = x^2 + 1 \Longrightarrow \phi(x,y) = x^2y + y + D(x)$$

Vi ser at $\phi(x,y) = x^2y + x^2 + y$ oppfyller begge betingelsene.

b) Vi vet at $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$ der $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er henholdsvis start- og sluttpunktet til C. Siden $\mathbf{a} = \mathbf{r}(0) = (1,1)$ og $\mathbf{b} = \mathbf{r}(1) = (-1,e)$, får vi

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \phi(-1,e) - \phi(1,1) = (2e+1) - 3 = 2e - 2$$

Oppgave 4. a) Vi får

$$\mathbf{r}'(t) = (2\cos^2 t - 2\sin^2 t, \cos t)$$

Den enkleste måten å finne den største x-verdien på er å observere at siden $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, kan parametriseringen omskrives til $\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \sin t)$. Den største x-verdien er derfor 1 som vi får når $2t = \frac{\pi}{2}$, dvs. når $t = \frac{\pi}{4}$. Den tilhørende y-verdien er $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vi kan også finne den maksimale x-verdien ved å observere at $x'(t) = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t$, som er null når $\cos t = \pm\sin t$. Dette skjer når $t = \frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{3\pi}{4}$, som gir henholdsvis maksimumsverdien 1 og minimumsverdien -1 for x. Den tilhørende y-verdien er som ovenfor.

b) Siden $dy = \cos t\,dt$, får vi

$$\int_C x\,dy = \int_0^\pi 2\sin t\cos^2 t\,dt = \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

Kurven gjennomløpes mot klokken, og bruker vi Greens teorem med $P = 0$, $Q = x$, får vi

$$\int_C x\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint 1\,dxdy = \text{areal}(R)$$

der R er området avgrenset av C. Altså er

$$\operatorname{areal}(R) = \int_C x\,dy = \frac{4}{3}$$

Oppgave 5. a) Egenverdiene er løsningene til ligningen

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 1$$

dvs. $(\lambda+1)^2 = -1$. Følgelig er $\lambda+1 = \pm i$, som gir egenverdiene $\lambda_1 = -1+i$ og $\lambda_2 = -1-i$.

b) En egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ til λ_1 er gitt ved $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, dvs.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

som gir ligningene

$$\begin{aligned} -x - y &= -x + ix \\ x - y &= -y + iy \end{aligned}$$

som begge er ekvivalente med $x = iy$. Velger vi $y = 1$, får vi egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Ved å komplekskonjugere finner vi en egenvektor for λ_2: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Ifølge den siste formelen på formelarket er den generelle, *reelle* løsningen gitt ved:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at}\big[\operatorname{Re}(\mathbf{v})(C\cos(bt) + D\sin(bt)) + \operatorname{Im}(\mathbf{v})(D\sin(bt) - C\cos(bt))\big]$$

I vårt tilfelle er $a = -1$, $b = 1$, $\operatorname{Re}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\operatorname{Im}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dette gir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{-t}\big[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(C\cos(t) + D\sin(t)) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(D\sin(t) - C\cos(t))\big] \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}(D\sin(t) - C\cos(t)) \\ e^{-t}(C\cos(t) + D\sin(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

der C og D er vilkårlige, *reelle* konstanter.

d) Likvektsløsningen er gitt ved $\mathbf{x}_p = -A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bruker vi formelen $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, får vi $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dermed er

$$\mathbf{x}_p = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Denne genelle løsningen til det inhomogene systemet er dermed

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t}(D\sin(t) - C\cos(t)) \\ e^{-t}(C\cos(t) + D\sin(t)) \end{pmatrix}$$

På grunn av faktoren e^{-t} går det siste leddet mot null, og alle løsninger konvergerer dermed mot likevektsløsningen.