Ekstraoppgaver 4

MAT1030 - Diskret Matematikk, Vår 2008

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Vi lager en sannhetsverditabell for utsagnet.

p	q	r	$\neg$	$((p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\neg r \rightarrow \neg q))$	$\vee$	$(\neg p \vee r)$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

Siden alle radene i tabellen har T under hovedkonnektivet $\vee$, konkluderer vi med at utsagnet må være en tautologi.

b) $p \rightarrow q$ kan erstattes med $\neg p \vee q$, og $\neg r \rightarrow \neg q$ kan erstattes med $\neg\neg r \vee \neg q$. Vi får da følgende utsagn.

$$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg r \vee \neg q)) \vee (\neg p \vee r)$$

c) Ved å begynne med utsagnet fra (b) og skyve negasjonstegnene innover, samt fjerne dobbeltnegasjoner, kan vi overføre utsagnet til svak normalform på følgende måte.

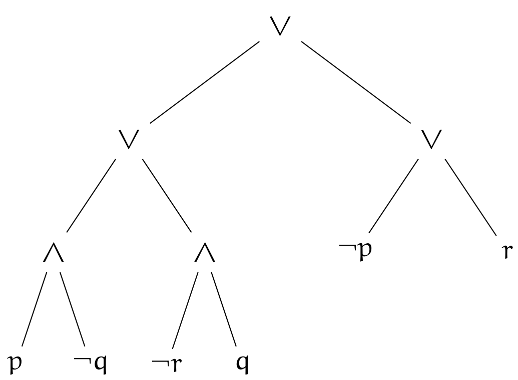
$$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg r \vee \neg q)) \vee (\neg p \vee r)$$

$$(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg\neg r \vee \neg q)) \vee (\neg p \vee r)$$

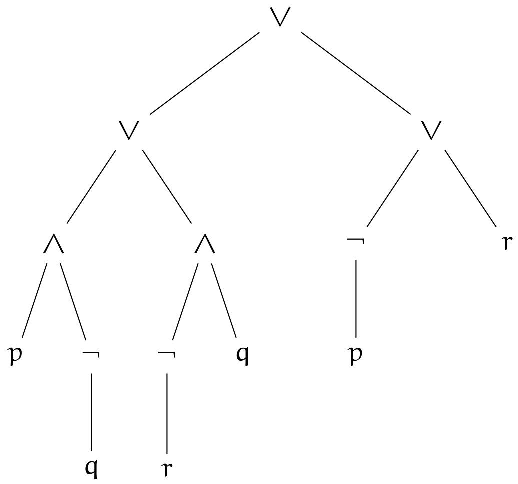
$$((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg\neg r \wedge \neg\neg q)) \vee (\neg p \vee r)$$

$$((p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge q)) \vee (\neg p \vee r)$$

Syntakstreet ser slik ut.



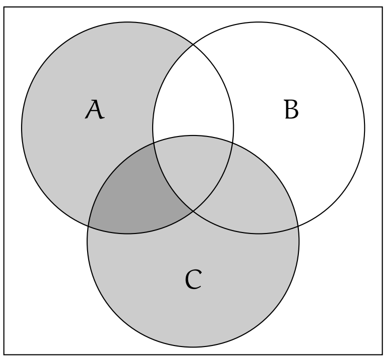
Hvis $\neg$ regnes som et funksjonssymbol som tar ett argument, så ser syntakstreet slik ut.



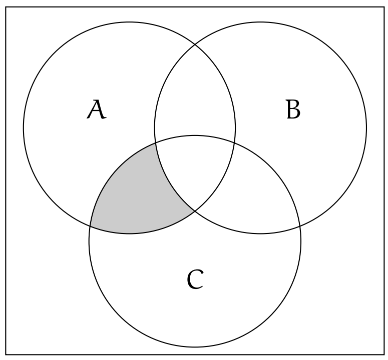
d) $\vee \vee \wedge p \neg q \wedge \neg r q \vee \neg p r$.

Oppgave 2

Vi tegner først Venn-diagrammene for begge mengdene.



$(A \cap \overline{B}) \cup C$



$(C - B) \cap A$

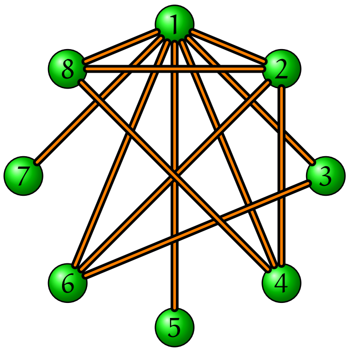
Inklusjonen $(A \cap \overline{B}) \cup C \subseteq (C - B) \cap A$ holder ikke, siden det er grå områder i det venstre Venn-diagrammet som ikke er grå i det høyre Venn-diagrammet.

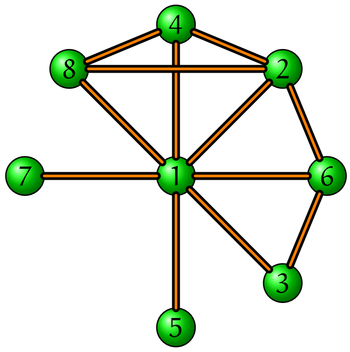
Den omvendte inklusjonen, $(C - B) \cap A \subseteq (A \cap \overline{B}) \cup C$, holder, siden alle de grå områdene i det høyre Venn-diagrammet er grå i det venstre Venn-diagrammet.

Oppgave 3

a)
- For å vise at R er transitiv, la x, y og z være vilkårlige tall i mengden, og anta at xRy og yRz. Da er x en faktor i y og y er en faktor i z. Da må x være en faktor i z, og da må xRz holde. Siden x, y og z var vikårlig valgt, må R være transitiv.
- For å vise at R er refleksiv, la x være et vilkårlig tall i mengden. Siden x er en faktor i x, holder xRx. Siden x var vikårlig valgt, må R være refleksiv.

b) Her er to måter å tegne grafen på.





Det fins hverken en Eulersti eller en Eulerkrets i grafen. Det er fordi antall noder med odde grad er 6. For å ha en Eulerkrets må alle nodene har grader som er partall, og det er ikke tilfellet her. For å ha en Eulersti (og ikke en Eulerkrets) må det være nøyaktig to noder av odde grad, og det er ikke tilfellet her.

Oppgave 4

Utsagnet er en tautologi. Det ser vi fra følgende bevistre, hvor alle bladnodene er aksiomer.

$$((p \land q) \lor r) \lor \underline{(\neg r \land (\neg p \lor \neg q))}$$

$$(p \land q) \lor \underline{r} \lor \underline{\neg r} \qquad \qquad (\underline{(p \land q)} \lor r) \lor \neg p \lor \neg q$$

$$\underline{p} \lor r \lor \underline{\neg p} \lor \neg q \qquad \qquad \underline{q} \lor r \lor \neg p \lor \underline{\neg q}$$

Oppgave 5

(a) Vi setter først opp termene under hverandre, for da er det lettere å gjøre unifiseringen.

$$\begin{array}{ccccccccc} s_1 & = & (& (0+x) & + & x) & \times & (y+z) \\ s_2 & = & (& y & + & x) & \times & (z+y) \end{array}$$

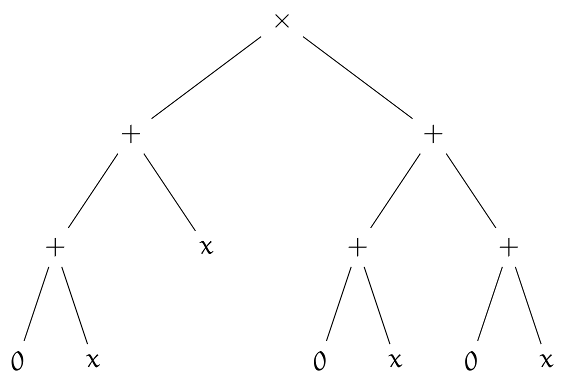
Dette reduseres til å unifisere

- $0 + x$ og y
- y og z

For å unifisere termene må derfor både y og z erstattes med $0 + x$.

Resultatet blir $((0 + x) + x) \times ((0 + x) + (0 + x))$.

(b) Syntakstreet ser slik ut.



Denne termen blir med polsk notasjon $\times + +0xx + +0x + 0x$

Oppgave 6

Vi setter først opp termene under hverandre, for da er det lettere å gjøre unifiseringen.

$$\begin{array}{llccccccccc} s_1 & = (& (0 & + & x) & + & (x+1) &) & \times & (y & + & 1) \\ s_2 & = (& (y & + & 1) & + & z &) & \times & (1 & + & 1) \end{array}$$

Dette reduseres til å unifisere

1. 0 og y
2. x og 1
3. $x+1$ og z
4. y og 1

For å unifisere termene må y erstattes både med 0 (fra linje 1) og med 1 (fra linje 4), og det er umulig. Vi konkluderer med at termene ikke er unifiserbare.

Oppgave 7

Det maksimale antallet utførelser av While-løkken bestemmer tidskompleksiteten. Det inntreffer når første bit er 1 og resten er 0. Hvis input er på m bit, så er dette binærformen til 2^m. Da vil løkken utføres $m-1$ ganger, og tidskompleksiteten kan gis ved funksjonen $f(m) = m-1$, som er $O(m)$.

Hver gang While-løkken utføres, så deles tallet med to. På binær form svarer det til at 0-bitet helt til høyre fjernes. F.eks. hvis x er lik 100_2 (som er 8_{10}), så er $x/2$ lik 10_2 (som er 4_{10}). Sagt på en annen måte: Hvis input svarer til tallet $n \cdot 2^k$, så vil While-løkken fjerne alle 2er-faktorene. Hvis input er $n \cdot 2^k$, så er output $n(n-1)$.