UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120A — Vektoranalyse, differensiallikninger og videregående lineær algebra.
Eksamensdag:	Tirsdag 11. desember 2001.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La W være legemet i $\mathbb{R}^3$ som er definert ved betingelsene

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)}\,, \qquad x^2+y^2+z^2 \leq 4\,.$$

a) Beskriv W ved hjelp av kulekoordinater. Beregn volumet til W og sentroiden til W.

b) La S være den delen av overflaten til W som ligger på kuleflaten $x^2+y^2+z^2=4$. Beregn arealet av S og sentroiden til S.

Oppgave 2.

La T være legemet i $\mathbb{R}^3$ som begrenses av flaten $z=\sqrt{2x^2+y^2+1}$ og av planet $z=x+1$. La C være skjæringskurven mellom flaten $z=\sqrt{2x^2+y^2+1}$ og planet $z=x+1$. Vi orienterer C mot urviseren sett fra punktet (0,0,2). La S være den del av overflaten til T som ligger på planet $z=x+1$.

La $\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + z\vec{k}$ og la $\vec{G}(x,y,z) = -yz\,\vec{\imath} + xz\,\vec{\jmath} - xy\,\vec{k}\,.$

a) Beregn $\operatorname{curl}\vec{F}$ og $\operatorname{div}\vec{G}$. Avgjør om $\vec{F}$ er konservativt i $\mathbb{R}^3$.

(Fortsettes side 2.)

b) Finn en parametrisering av C og regn ut linjeintegralet $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ved hjelp av denne.

c) Regn ut $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ved hjelp av Stokes teorem.

d) Beregn fluks-integralet $\iint_S \vec{G} \cdot \vec{n}\, dS$ der $\vec{n}$ er enhetsnormalvektoren til S med positiv $\vec{k}$-komponent.

Oppgave 3.

La V være vektorrommet som består av alle reelle funksjoner på $\mathbb{R}$ på formen $f(x) = a + b\sin x + c\cos x$, der $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vi tar det som gitt at $\mathcal{B} = \{1, \sin x, \cos x\}$ er en basis for V.

a) La $S : V \to V$ være lineær avbildningen gitt ved

$$S(f(x)) = f'(0)\sin x - f(0)\cos x$$

der $f'(0)$ betegner den deriverte av $f(x)$ i 0.
Finn basiser for kjernen til S og for bildet til S.

b) Vi betrakter indreproduktet på V gitt ved

$$\langle f(x), g(x)\rangle = f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)g\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + f(0)g(0) + f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)g\Big(\frac{\pi}{2}\Big)$$

Finn en ortonormal basis $\mathcal{C}$ for V m.h.p. indreproduktet $\langle\, ,\rangle$.

c) Finn overgangsmatrisene fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ og fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$.

d) La $T : V \to V$ være lineæravbildningen definert ved

$$T(a + b\sin x + c\cos x) = \Big(a + \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{c}{3}\Big) + \Big(b - \frac{c}{\sqrt{3}}\Big)\sin x - \sqrt{3}\, b\cos x$$

der $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Finn matrisen til T m.h.p. basisen $\mathcal{C}$ funnet i b). Begrunn at T er ortogonalt diagonaliserbar med hensyn på indreproduktet $\langle\, ,\rangle$.

Oppgave 4.

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 10\sin x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(Fortsettes side 3.)

b) Bestem hvilke av følgende komplekse matriser som er unitært diagonaliserbare:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-i \\ 2 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & i \\ 2-i & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1+i & 4 \\ 4 & 3+i \end{bmatrix}$$

SLUTT