UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120A — Vektoranalyse, differensiallikninger og videregående lineær algebra.
Eksamensdag:	Torsdag 16. mai 2002.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) La S være flaten med parameterframstillingen

$$\vec{X}(u,t) = (ue^t \cos t, ue^t \sin t, ue^t), \qquad u \in [0,1],\ t \in [0,\pi]$$

Finn arealet av S. Vis at punktene (x,y,z) på flaten S oppfyller likningen $z^2 = x^2 + y^2$.

b) La S_0 være området i xy-planet som vi får når S projiseres ned i xy-planet. (Dvs. $(x,y) \in S_0$ hvis og bare hvis det fins z slik at $(x,y,z) \in S$.) La D være legemet gitt ved

$$D = \left\{(x,y,z) | (x,y) \in S_0 \ \text{ og } \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\,\right\}$$

Finn arealet av hele overflaten til D.

c) Finn volumet av D.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La S være flaten $z^2 = x^2 + 4y^2$, $0 \leq z \leq 2$. La C være skjæringskurven mellom denne flaten og flaten $x^2 + 4y^2 = 4$.

La $\vec{F}(x,y,z) = yz^2\vec{\imath} + \left(\frac{2}{3}x^3 + 8y^2x\right)\vec{\jmath} + xyz\vec{k}$ og
$\vec{G}(x,y,z) = 4xy\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath} + xz\vec{k}$.

a) Finn $\operatorname{curl}\vec{F}$ og $\operatorname{div}\vec{G}$.

b) Orientér C mot urviseren sett ovenfra (dvs. sett fra et punkt på z-aksen med stor positiv z verdi). Finn $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

c) Finn $\int_S \vec{G}\cdot d\vec{S}$ der S er orientert slik at enhetsnormalen har negativ z-komponent.

Oppgave 3.

Vi betrakter det reelle vektorrommet $\mathcal{P}_2$, som består av alle reelle polynomer av grad opptil 2 i en reell variabel.

Vi lar $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ betegne standard-basisen for $\mathcal{P}_2$ (dvs. $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ når $x \in \mathbb{R}$). La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineær avbildningen definert ved

$$T(p)(x) = p(x) + p(2-x)\ , \qquad p \in \mathcal{P}_2,\quad x \in \mathbb{R}\ .$$

a) Bestem matrisen til T med hensyn på $\mathcal{B}$. La $u \in \mathcal{P}_2$ være gitt ved $u(x) = 1 + x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Beregn $[T(u)]_{\mathcal{B}}$ på to forskjellige måter.

b) Begrunn at T er hverken en-til-en eller på $\mathcal{P}_2$. Angi en basis for $\ker(T)$ og en basis for $R(T)$.

c) la $T^2 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineær avbildningen gitt ved $T^2 = T \circ T$. Bestem matrisen til T^2 med hensyn på $\mathcal{B}$. Sjekk at $T^2(p) = 2T(p)$ for alle $p \in \mathcal{P}_2$. Begrunn at enhver vektor i $R(T)$ som er forskjellig fra nullvektoren er en egenvektor for T.

Vi betrakter nå $\mathcal{P}_2$ utstyrt med indreproduktet

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + 2p(1)q(1) + p(2)q(2)\ , \qquad p, q \in \mathcal{P}_2\ .$$

d) Finn en ortonormal basis for $\ker(T)$ og en ortonormal basis for $R(T)$. Begrunn at $\ker(T)$ er det ortogonale komplementet til $R(T)$, dvs. at $\ker(T) = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid \langle p, q\rangle = 0 \text{ for alle } q \in R(T)\}$.

e) Finn en ortonormal basis $\mathcal{C}$ for $\mathcal{P}_2$ som består av egenvektorer for T. Angi matrisen til T med hensyn på $\mathcal{C}$. Beregn $[T(u)]_{\mathcal{C}}$ der u er som angitt i a).

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 4.

Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y''' - y = e^x$$

der y er en reell funksjon av x som er tre ganger deriverbar på hele $\mathbb{R}$.

SLUTT