UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120A — Vektoranalyse, differensiallikninger og videregående lineær algebra.
Eksamensdag:	Lørdag 7. desember 2002.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi betrakter det komplekse vektorrommet $\mathbb{C}^3$ utstyrt med det Euklidske indre produktet gitt ved

$$\langle \vec{z}, \vec{z}\,' \rangle = \bar{z}_1 z_1' + \bar{z}_2 z_2' + \bar{z}_3 z_3'$$

når $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$, $\vec{z}\,' = (z_1', z_2', z_3')$.

La U være underrommet av $\mathbb{C}^3$ utspent av mengden $\{(1, i, i), (2, i, 0)\}$. Finn en ortonormal basis for U og beregn den ortogonale projeksjonen av vektoren $(1 + i, -i, -2)$ på U.

Oppgave 2.

Vi betrakter det reelle vektorrommet $\mathcal{P}_3$ som består av alle reelle polynomer av grad mindre eller lik 3 i en reell variabel x. Vi lar $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ være standardbasisen for $\mathcal{P}_3$ og setter

$$\mathcal{C} = \{1 + x, x^2, 1 + x^3, x^2 + x^3\},$$
$$q(x) = 1 + 2x + 3x^2 - x^3.$$

(Fortsettes side 2.)

a) Begrunn at $\mathcal{C}$ er en basis for $\mathcal{P}_3$ og at overgangsmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ er matrisen $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Angi koordinatvektoren til $q(x)$ med hensyn på $\mathcal{C}$.

Definer avbildningen $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ved

$$T(p(x)) = p(1) + p(-1)x + p(1)x^2 + 2p(0)x^3, \qquad p(x) \in \mathcal{P}_3.$$

b) Begrunn at T er lineær og avgjør om T er en isomorfi.

La W være underrommet av $\mathcal{P}_3$ som består av alle polynomene i $\mathcal{P}_3$ som er slik at $p(1) = 2p(0) + p(-1)$.

c) Sjekk at $q(x) \in W$. Begrunn at $\mathcal{A} = \{1 + x, x^2, 1 + x^3\}$ er en basis for W og angi dimensjonen til W.

Det viser seg at T avbilder W inni seg selv. Vi kan derfor betrakte avbildningen $S : W \to W$ definert ved $S(p(x)) = T(p(x))$, $p(x) \in W$.

d) Begrunn at matrisen til S med hensyn på $\mathcal{A}$ er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Regn ut koordinatvektoren til $S(q(x))$ med hensyn på $\mathcal{A}$.

e) Bestem egenverdiene til S og angi en basis for hvert av de tilhørende egenrommene. Avgjør om S er diagonaliserbar.

Oppgave 3.

La R være området i xy-planet bestemt ved $x^2 + \frac{1}{2}y^2 \le 1$. La S_1 være den delen av flaten $z = x^2$ som ligger over R og la S_2 være den delen av flaten $z = 2 - x^2 - y^2$ som ligger over R. La T være legemet som avgrenses nedenfra av S_1 og ovenfra av S_2. La C være kurven der S_1 og S_2 møter hverandre, og orienter C mot klokka sett fra punktet $(0, 0, 2)$. La $\vec{F}$ være vektorfeltet i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\vec{F}(x, y, z) = (z - x^2, 2xy, y + z).$$

a) Beregn $\vec{G} = \operatorname{curl} \vec{F}$. Angi en parametrisering av C og beregn kurveintegralet av $\vec{G}$ langs C ved hjelp av denne.

b) Beregn kurveintegralet av $\vec{F}$ langs C ved hjelp av Stokes teorem. Avgjør om $\vec{F}$ er konservativt på $\mathbb{R}^3$.

(Fortsettes side 3.)

c) La $\vec{n}_1$ være enhetsnormalvektorfeltet til S_1 som peker oppover. Beregn fluksintegralet $\iint\limits_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS$.

d) La $\vec{n}_2$ være enhetsnormalvektorfeltet til S_2 som peker oppover. Begrunn at

$$\iint\limits_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS = V + \iint\limits_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS$$

der $V =$ volumet til T. Beregn V og $\iint\limits_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS$.

Oppgave 4.

La $a > 0$. La B være kula angitt ved $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ og la S være overflaten til B.

Anta at $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + (z - a)^2\right)^{1/2}$ angir en massetetthetsfunksjon for S og for B.

a) Oppgi en parametrisering av S ved hjelp av kulekoordinatene ϕ og θ. Beregn massen til S.

b) Beregn massen til B.

Oppgave 5.

La V være det reelle vektorrommet som består av alle reelle funksjoner definert på intervallet $I = (0, +\infty)$ og la W være underrommet av V som består av alle de funksjonene i V som er to ganger deriverbare på I.

La $D : W \to V$ være den lineære avbildningen definert ved

$$(D(f))(x) = x^2 f''(x) + 3x \, f'(x) + f(x), \qquad f \in W, \quad x \in I \; .$$

Angi en basis for kjernen til D. Bestem løsningsmengden til likningen $D(f) = g$ når $g(x) = 3x^2 + 4x + 1$, $x \in I$.

SLUTT