UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120A — Vektoranalyse, differensiallikninger og videregående lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 16. mai 2003.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La V være legemet i $\mathbb{R}^3$ bestemt ved

$$-x \le y \le x, \quad x^2 + y^2 \le 4, \quad 0 \le z \le x^2 - y^2 \,.$$

La S være hele overflaten til legemet V og la $\vec{n}$ være den utadrettede enhetsnormalen til S. La $\vec{F}$ være vektorfeltet definert på $\mathbb{R}^3$ ved

$$\vec{F}(x, y, z) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$$

a) Beskriv V i sylinderkoordinater. Beregn volumet til V og z-koordinaten til sentroiden til V.

b) Beregn fluksintegralet $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ ved hjelp av divergensteoremet.

c) Beregn $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ ved direkte utregning.

Oppgave 2.

La R være området i den åpne første kvadrant av xy-planet bestemt ved $x \le y \le 2x$ og $\dfrac{1}{x^2} \le y \le \dfrac{4}{x^2}$.

(Fortsettes side 2.)

a) Beregn $\iint\limits_R y\,dx\,dy$ ved å benytte variabelskiftet $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2 y$.

b) La $\vec{F}$ være vektorfeltet definert på $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\vec{F}(x,y) = (x^3 - y^2)\vec{\imath} + (xy - y^3)\vec{\jmath}\,.$$

Avgjør om $\vec{F}$ er konservativt på $\mathbb{R}^2$. Beregn $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ der C er randkurven til området R, orientert mot klokka sett ovenfra.

Oppgave 3.

Vi betrakter det reelle vektorrommet $\mathcal{P}_2$ som består av alle reelle polynomer av grad mindre eller lik 2 i en reell variabel x. Vi lar $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ være standardbasisen for $\mathcal{P}_2$. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være avbildningen definert ved

$$T(p(x)) = p(1) + p'(0)x + (p'(0) + p''(0))x^2$$

a) Vis at T er lineær og bestem matrisen til T med hensyn på $\mathcal{B}$.

b) Bestem egenverdiene til T og begrunn at T er en isomorfi.

c) Vis at T er diagonaliserbar og angi en basis $\mathcal{C}$ for $\mathcal{P}_2$ som består av egenvektorer for T.

d) Beregn overgansmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$ og koordinatvektoren til $q(x) = 2 + x - 3x^2$ med hensyn på $\mathcal{C}$.

e) La $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være den inverse avbildningen til T, med andre ord $S = T^{-1}$. Angi matrisen til S med hensyn på $\mathcal{C}$. Bestem deretter matrisen til S^n med hensyn på $\mathcal{B}$, der S^n er sammensetningen $S \circ S \circ \cdots \circ S$ (n-ganger).

Oppgave 4.

Vi betrakter det reelle vektorrommet V som består av alle kontinuerlige reelle funksjoner på intervallet $[0,1]$, utstyrt med indre produktet

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \qquad f, g \in V.$$

La W være underrommet av V utspent av $\{f_1, f_2\}$ der $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sqrt{t}$, $(0 \le t \le 1)$.

Finn en ortogonal basis for W. Bestem deretter vektoren h i W som ligger nærmest g, der $g(t) = t^2$, $0 \le t \le 1$.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 5.

Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 4y = \sin x + \sin(2x)$$

der y er en reell funksjon av x som er to ganger deriverbar på hele $\mathbb{R}$.

SLUTT