UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120A — Vektoranalyse, differensiallikninger og videregående lineær algebra.
Eksamensdag:	Mandag 15. desember 2003.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $\vec{F}$ være vektorfeltet i $\mathbb{R}^3$ definert ved

$$\vec{F}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} + (xz+y)\vec{\jmath} + (xy+z^2)\vec{k}$$

a) Vis at $\vec{F}$ er konservativt i $\mathbb{R}^3$ og finn en potensialfunksjon for $\vec{F}$. Beregn linjeintegralet til $\vec{F}$ langs en vilkårlig vei fra $(0,0,0)$ til $(1,2,3)$.

b) La S være flaten i rommet angitt ved $y = 4 - x^2$, z vilkårlig. La V være legemet som begrenses av S og av de fire planene $x = 0$, $y = 0$, $z = x$ og $z = 2$.

La S' være overflaten til V. Beregn fluksintegralet av $\vec{F}$ ut av S'.

c) La S'' være den delen av S' som er en del av S. Anta at S'' er laget av et materiale med massetetthetsfunksjon $f(x,y,z) = xz$, $(x,y,z) \in S''$. Beregn massen til S''.

Oppgave 2.

La D være disken i xy-planet gitt ved $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ og la R være den delen av D som tilfredsstiller $0 \leq y \leq \sqrt{3}\,x$.

(Fortsettes side 2.)

a) La C være randkurven til D, orientert mot urviseren. Beregn $\int_C x\,dy$ og angi arealet av R.

b) La T være legemet i xyz-rommet som fremkommer ved å rotere R 360° rundt y-aksen.
Beregn volumet til T og bestem koordinatene $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ til sentroiden til T.

Oppgave 3.

Vi betrakter vektorrommet $\mathcal{P}_2$ som består av alle reelle polynomer av grad mindre eller lik 2 i en reell variabel x, med standard basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være lineær avbildningen gitt ved

$$T(p(x)) = (x^2 - 1)p''(x) + 4x\,p'(x) + 2p(x), \qquad p(x) \in \mathcal{P}_2.$$

a) Bestem matrisen til T med hensyn på $\mathcal{B}$. Begrunn at T er en isomorfi.

b) Vis at T er diagonaliserbar og angi en basis $\mathcal{C}$ for $\mathcal{P}_2$ som består av egenvektorer for T.

c) Bestem overgangsmatrisen fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$. Angi et indre produkt for $\mathcal{P}_2$ som er slik at $\mathcal{C}$ er en ortonormal basis for $\mathcal{P}_2$ med hensyn på dette indre produktet.

Oppgave 4.

La V være det reelle vektorrommet som består av alle reelle funksjoner definert på $I = (-1, 1)$ og la W være underrommet av V som består av elementene i V som er to ganger deriverbare på I. La $D : W \to V$ være lineæravbildningen definert ved

$$D(f(x)) = (x^2 - 1)f''(x) + 4x\,f'(x) + 2f(x), \qquad x \in I.$$

Fra teorien vet vi at kjernen til D har dimensjon lik 2.

a) Bruk potensrekkemetoden til å bestemme kjernen til D og angi en basis $\{u_1(x), u_2(x)\}$ for denne.

b) La $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad x \in I$, der $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$D(f(x)) = g(x), \qquad x \in I.$$

c) Bruk variasjon av parameterne til å finne en løsning av differensiallikningen $D(f(x)) = e^x$, $x \in I$. Angi deretter den generelle løsningen av denne likningen.

SLUTT