UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 120A — Vektoranalyse, differentialligninger og videregående lineær algebra.
Eksamensdag:	Onsdag 19. mai 2004.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La T være legemet i $\mathbb{R}^3$ som begrenses av flaten $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og av planene $z = 1$ og $z = 2$. Beregn massen til T når dets massetetthetsfunksjon antas å være

$$f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Oppgave 2.

La W være området i $\mathbb{R}^3$ som begrenses av de to paraboloidene
$z = x^2 + (y + 1)^2$ og $z = 10 - x^2 - (y - 1)^2$, og la C betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene.
La $\vec{F}$ være vektorfeltet i $\mathbb{R}^3$ definert ved

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$$

(Fortsettes side 2.)

a) La I betegne fluksintegralet til $\vec{F}$ ut av overflaten S til T. Beregn I ved hjelp av divergensteoremet.

b) Beregn flateintegralet $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_1$, der S_1 er den delen av S som er en del av $z = x^2 + (y+1)^2$ og $\vec{n}$ er enhetsnormalvektoren til S_1 som peker nedover.

c) La L betegne linjeintegralet av $\vec{F}$ langs C når C orienteres mot urvisereren sett fra punktet $(0, 0, 10)$. Beregn L ved direkte utregning.

d) Beregn L ved å anvende Stokes teorem på en passende måte.

Oppgave 3.

La $\mathcal{P}_2$ være det reelle vektorrommet som består av alle reelle polynomer av grad mindre enn eller lik 2 i en reell variabel. For to polynomer p og q setter vi $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, og vi anser det som kjent at $\langle\ ,\ \rangle$ definerer et indreprodukt på $\mathcal{P}_2$.

a) La $p_1(x) = 1, p_2(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$. Sjekk at p_1 er ortogonal på p_2 m.h.p. $\langle\ ,\ \rangle$. Finn deretter et polynom $p_3 \in \mathcal{P}_2$ slik at $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ er en ortogonal basis for $\mathcal{P}_2$ m.h.p. $\langle\ ,\ \rangle$.

b) La $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ være den lineære avbildningen som er bestemt ved at $T(p_1) = p_1, T(p_2) = -p_2, T(p_3) = p_3$. Angi matrisen til T m.h.p. $\mathcal{B}$. Bestem så matrisen til T m.h.p. standard basisen $\{1, x, x^2\}$ for $\mathcal{P}_2$.

c) Begrunn at T er invertibel og at $T \circ T = T^2$ er lik identitetsavbildningen. Angi matrisen til T^{-1} m.h.p. $\{1, x, x^2\}$.

Oppgave 4.

Betrakt den komplekse matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix}$$

Begrunn at A er unitært diagonaliserbar.
Finn deretter egenverdiene λ_1 og λ_2 til A og bestem en 2×2 unitær matrise U slik at

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 5.

La V være det reelle vektorrommet som består av alle reelle funksjoner på $\mathbb{R}$ og la W være underrommet av V som består av alle elementene i V som er to ganger deriverbare på $\mathbb{R}$ med kontinuerlig annen derivert.
La $D : W \to V$ være lineæravbildningen definert ved

$$D(f(x)) = 2f''(x) - xf'(x) - 2f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Fra teorien vet vi at kjernen til D har dimensjon 2.

a) Bruk potensrekkemetoden til å bestemme kjernen til D ved å angi en basis $\{u_1(x), u_2(x)\}$ for denne. (Funksjonene $u_1(x)$ og $u_2(x)$ skal bare angis som potensrekker.)

b) Finn den generelle løsningen $y = y(x)$ av differensialligningen

$$2y'' - xy' - 2y = 1 - 3x - 4x^2, \qquad x \in \mathbb{R}$$

ved hjelp av a).

SLUTT