UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 120A — Vektoranalyse, differensiallikninger og videregående lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 27. mai 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La c være et reelt eller komplekst tall, og betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{bmatrix}$.

a) Finn egenverdier og de tilhørende egenvektorer til A.

b) For hvilke c er A Hermitisk? Vis at det finnes en matrise P slik at $P^{-1}AP$ er diagonal for alle c. Kan P velges unitær?

c) Finn en matrise B slik at $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 2.

La V være vektorrommet av alle funksjoner på formen
$f(x) = a\sin x + b\cos x$, der a og b er reelle tall.

a) La $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)g\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Vis at dette definerer et indreprodukt på V og finn en ortonormal basis for V med hensyn på dette indreproduktet. Finn projeksjonen av $\cos x$ på underrommet utspent av $\sin x$.

(Fortsettes side 2.)

b) La nå t være et tall og la

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f(t)g(t).$$

For hvilke t er dette et indreprodukt på V?

c) Vis at formelen $(Pf)(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ definerer en lineær avbildning $P : V \to V$. Hva er matrisen til P relativt til basisen $\{\sin x, \cos x\}$?

Oppgave 3.

La $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ være vektorfeltet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{2x \cos z}{1 + x^2 + y^2}\boldsymbol{i} + \frac{2y \cos z}{1 + x^2 + y^2}\boldsymbol{j} - \sin z \ln(1 + x^2 + y^2)\boldsymbol{k},$$

og la C være den orienterte, lukkede romkurven som består av følgende kurvestykker:

C_1: Det rette linjestykket fra (1,0,0) til $\left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right)$.

C_2: Sirkelbuen $x^2+y^2 = 1$, $z = \left(\frac{\pi}{4}\right)$ i første oktant fra $\left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right)$ til $\left(0, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

C_3: Det rette linjestykket fra $\left(0, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ tilbake til (1,0,0).

a) Finn curl $\boldsymbol{F}$. Beregn $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

b) Beregn $\int_{C_i} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ for $i = 1, 2, 3$.

Oppgave 4.

a) La T være området i R^3 beskrevet ved $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $z^2 \leq x^2$. Beregn $\iiint_T \frac{y}{1+x^2+y^2} dx\, dy\, dz$ ved å innføre sylinderkoordinater.

b) La S være en lukket, glatt og orientert flate i rommet med ytre enhetsnormal $\boldsymbol{n}(x, y, z)$, og anta at $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ er et vektorfelt som er definert og har kontinuerlige partielle deriverte i hele rommet, og slik at $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{n}(x, y, z)$ på S.

Vis at det ikke finnes noe vektorfelt $\boldsymbol{G}(x, y, z)$ slik at $\boldsymbol{F} = \text{curl}\, \boldsymbol{G}$.

SLUTT