UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1300 — Analyse 1.
Eksamensdag:	Torsdag 1. juni 2006.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1.

a) Vis at $f_n(x) = (\sin x \cdot \cos x)^n$ konvergerer uniformt mot 0 i hele $\mathbb{R}$ når $n \to \infty$.

b) La $\mathbf{v}_n = (x_n, y_n)$ være en følge i $\mathbb{R}^2$ slik at $|x_n| + |y_n| \leq 1$. Vis at $\mathbf{v}_n$ har en konvergent delfølge.

c) Vis at $f(x) = \ln(1+x)$ er uniformt kontinuerlig i $[0, \infty)$.

d) Anta at $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er deriverbar overalt og $\mathbf{f}(0,0) = (\frac{1}{2}, 0)$. La $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ og anta at $\|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{2}$ (operatornorm) for alle $\mathbf{x} \in X$. Vis at det fins en entydig $\mathbf{x} \in X$ slik at $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

e) La A, B være to delmengder av $\mathbb{R}$ slik at for alle $x \in A$ og $y \in B$ gjelder at $x \leq y$. Vis at $\sup A \leq \inf B$. Bruk dette til å vise at om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er begrenset, så er

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x,y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x,y).$$

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{f}(x, y) = (xe^{xy+1}, ye^{xy+1})$$

$\mathbf{f}$ er deriverbar og $D\mathbf{f}$ er kontinuerlig i hele $\mathbb{R}^2$ (skal ikke vises).

a) Finn Jacobimatrisen til $\mathbf{f}$ og beregn operatornormen til $D\mathbf{f}(-\frac{1}{2}, 2)$.

b) Vis at det finnes en åpen omegn B om $(1, 0)$ slik at $\mathbf{f}\big|_B$ har en entydig invers funksjon $\mathbf{g}$ og beregn matrisen til $D\mathbf{g}(e, 0)$.

c) La $U = B((1, 1), 1) = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$. Vis at $\mathbf{f}^{-1}(U)$ og $\mathbf{f}(U)$ er åpne mengder.

Oppgave 3.

La

$$T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$$

være definert ved $Tf(x) = xf(x)$, dvs $Tf = g$ der $g(x) = xf(x)$. $C([0, 1])$ er utstyrt med vanlig uniform norm (supnorm)

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

a) Vis at T er kontinuerlig og at $\|T\| = 1$.

b) Vi definerer $*$-normen på $C([0, 1])$ ved

$$\|f\|_* = \|Tf\|_\infty$$

Vis at dette er en norm. Er $*$-normen og den uniforme normen Lipschitz ekvivalente?

c) Vis at det fins konstanter $K_n > 0$ slik at

$$\|P\|_\infty \leq K_n \|P\|_*$$

for alle polynomer P av grad mindre eller lik n. Kan K_n velges uavhengig av n?

SLUTT