UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1300 — Analyse I
Eksamensdag:	29. mai 2009
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 40%)

La $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være definert ved

$$\mathbf{f}(x, y) = (x + y, xy)\,.$$

1a

La $L \subseteq \mathbb{R}^2$ være en lukket delmengde. Er $\mathbf{f}^{-1}(L)$ lukket i $\mathbb{R}^2$? Begrunn svaret.

1b

La $R \geq 1$ og anta at $\max\{|x|, |y|\} \geq R$. Vis at

$$\max\{|x + y|, |xy|\} \geq R/2\,.$$

[Hint: Anta først at $x \geq R$ og vis at $x + y \geq R/2$ eller $xy \leq -R/2$. Se så på tilfellene $x \leq -R$, $y \geq R$ og $y \leq -R$.]

1c

La $B \subset \mathbb{R}^2$ være en begrenset delmengde. Er $\mathbf{f}^{-1}(B)$ begrenset i $\mathbb{R}^2$? Begrunn svaret.

1d

La $K \subset \mathbb{R}^2$ være en delmengde med Bolzano–Weierstrass egenskapen. Vil $\mathbf{f}^{-1}(K)$ ha Bolzano–Weierstrass egenskapen? Begrunn svaret.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 20%)

En funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sies å være surjektiv (= på) hvis $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Betrakt en følge $(f_n)_n$ av kontinuerlige, surjektive funksjoner $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for $n \in \mathbb{N}$.

2a

Anta at $(f_n)_n$ konvergerer punktvis mot en funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ når $n \to \infty$. Vil f nødvendigvis være surjektiv? Begrunn svaret med et bevis eller et moteksempel.

2b

Anta at $(f_n)_n$ konvergerer uniformt mot en funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ når $n \to \infty$. Vil f nødvendigvis være surjektiv? Begrunn svaret med et bevis eller et moteksempel.

[Hint til 2a eller 2b: I det tilfellet der det kreves et moteksempel, kan hver f_n velges som en lineær funksjon på formen $f_n(x) = a_n x$, med $a_n \in \mathbb{R}$.]

Oppgave 3 (vekt 40%)

La $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en gitt deriverbar funksjon med kontinuerlig derivert, og anta at $g'(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Spesielt er g strengt voksende. La $a < b$ og $c < d$ i $\mathbb{R}$ være valgt slik at $g([c, d]) = [a, b]$.

La $C([a, b])$ være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ med den vanlige vektorsummen $(f_1 + f_2)(s) = f_1(s) + f_2(s)$ og skalarproduktet $(\lambda f)(s) = \lambda f(s)$. Tilsvarende, la $C([c, d])$ være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner $h: [c, d] \to \mathbb{R}$.

3a

Forklar hvorfor regelen som tar $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ til $Tf: [c, d] \to \mathbb{R}$, med

$$(Tf)(x) = f(g(x))$$

for alle $x \in [c, d]$, spesifiserer en veldefinert, lineær avbildning $T: C([a, b]) \to C([c, d])$.

3b

La

$$K = \sup_{x \in [c,d]} \left(\frac{1}{g'(x)} \right) .$$

Forklar hvorfor K er et veldefinert reelt tall.

(Fortsettes på side 3.)

3c

Gi $C([a,b])$ normen $\|f\|_1 = \int_a^b |f(s)|\,ds$, og tilsvarende gi $C([c,d])$ normen $\|h\|_2 = \int_c^d |h(x)|\,dx$. Vis at

$$||Tf||_2 \leq K\|f\|_1$$

for alle $f \in C([a,b])$.

3d

Bevis at operatornormen til

$$T\colon (C([a,b]), \|\ \|_1) \to (C([c,d]), \|\ \|_2)$$

oppfyller $\|T\| = K$.

SLUTT