UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3510/4510 — Geometriske strukturer.
Eksamensdag:	Torsdag 2. desember 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Bruk den hyperbolske sinussetningen til å vise at i en hyperbolsk trekant har den største vinkelen den lengste motstående siden.

b) La L være en $\mathbb{H}$-linje og la H_+ være den ene av de to komponentene L deler $\mathbb{H}$ i.

Hvert punkt w på L er hjørnet for en entydig bestemt stråle $\sigma(w)$ som ligger i H_+ og står ortogonalt på L.

La $d > 0$ være et fiksert tall, og la $z(w) \in H_+$ være det punktet på $\sigma(w)$ som har hyperbolske avstand d fra w.
Vis at alle punktene $z(w)$, $w \in L$ ligger på en sirkel eller rett linje i $\mathbb{C}$. Er dette også en $\mathbb{H}$-linje? (Hint: Vis først at det er nok å anta at L er den positive imaginære aksen.)

Oppgave 2.

a) La S være en regulær flate i $\mathbb{R}^3$. Forklar hva det vil si at en kurve på S er geodetisk.
Vis at hvis $\ell \subset S$ er en rett linje i $\mathbb{R}^3$, så er ℓ geodetisk.

(Fortsettes side 2.)

b) Anta S_1 og S_2 er to flater i $\mathbb{R}^3$ som skjærer hverandre *ortogonalt* langs en kurve C. Vis at hvis C er geodetisk i både S_1 og S_2, så er C en rett linje i $\mathbb{R}$. (To flater skjærer hverandre ortogonalt hvis de to normalene står ortogonalt på hverandre i skjæringspunktene.)

Oppgave 3.

La $f(x)$ være en glatt funksjon og la S være omdreiningsflaten vi får når vi dreier grafen $y = f(x)$ om x-aksen. Finn en formel for Gausskrumningen til S. Hvilke slike omdreiningsflater har konstant krumning 0?

Oppgave 4.

a) Formuler Gauss-Bonnets setning.

b) Anta S er en kompakt, orienterbar flate med krumning overalt > 0. Vis at $S \approx S^2$.

c) La S være en kompakt, orienterbar flate med konstant krumning $K \neq 0$, og anta $S = S_1 \cup S_2$, der $S_1 \cap S_2$ er en enkel, lukket geodetisk kurve. Vis at forholdet mellom arealene av S_1 og S_2 er et rasjonalt tall.
Hva er dette forholdet hvis $K > 0$?

SLUTT