UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3510/4510 — Geometriske strukturer.
Eksamensdag:	Fredag 2. desember 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Gi de generelle formelutrykkene for Möbiustransformasjonene i $M\ddot{o}b^+(\mathbb{D})$ og i $M\ddot{o}b^-(\mathbb{D})$ og beskriv de hyperbolske linjene i $\mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$-linjene).

b) La $\mathcal{C}$ være en regulær kurve i $\mathbb{C}$ (dvs. vi antar at for hver $p \in \mathcal{C}$ fins omegn U om p i $\mathbb{C}$ og en lokal glatt parametrisering $z : I \to \mathbb{C}$ slik at z en homeomorfi på $U \cap \mathcal{C}$ og $z'(t) \neq 0$ for $z \in I$). Anta $\mathcal{C}$ er lukket som delmengde av $\mathbb{C}$ og la $w \in \mathbb{C} - \mathcal{C}$. Definer $d(w, \mathcal{C}) = \inf_{z \in \mathcal{C}} |w - z|$.

Da gjelder følgende: Det fins $z \in \mathcal{C}$ slik at $d(w, \mathcal{C}) = |w - z|$ og for slike z vil den rette linja gjennom w og z skjære $\mathcal{C}$ ortogonalt i z (dvs. linja står normalt på tangentlinja til $\mathcal{C}$ i z). (Det er ikke meningen at du skal vise dette).

Vis at om $\mathbb{C}$ erstattes med $\mathbb{H}$ eller $\mathbb{D}$, Euklidsk avstand med hyperbolsk avstand og Euklidsk linje med hyperbolsk linje så vil tilsvarende setning gjelde. (Hint vis at det er nok å vise setningen for $\mathbb{D}$ og $w = 0$.)

c) La $l = \{z : |z| = 1, z \in \mathbb{H}\}$. La $w_t = it$, $t > 1$. Finn $z_t = x_t + iy_t \in l$ med $x_t > 0$ slik at $d_{\mathbb{H}}(i, w_t) = d_{\mathbb{H}}(i, z_t)$.

(Fortsettes side 2.)

d) Formulér 2. cosinussetning for hyperbolske trekanter (setningen som gir en likning mellom de tre vinklene og lengden av en side).

La w_t og z_t være som i c) og la T være den hyperbolske trekanten med hjørner i, z_t og w_t. Bestem t slik at T får hyperbolsk areal lik $\frac{\pi}{6}$ (Du kan her få bruk for formelen $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.)

Oppgave 2.

Forklar hva vi mener med en isometri mellom to Riemannske flater.
La S og S' være Riemannske flater og la $\phi : S \to S'$ være en diffeomorfi. Vis at ϕ er en isometri hvis og bare hvis for enhver glatt kurve $\alpha : I \to S$ gjelder at $l(\alpha) = l(\phi \circ \alpha)$ (der $l(\alpha)$ betegner buelengden til α).

Oppgave 3.

a) La S være den regulære flaten i $\mathbb{R}^3$ som er gitt ved kartet

$$x = \cosh v \cos u,\ y = \cosh v \sin u,\ z = v$$

der $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$.

Bestem Gausskrumningen til S.

b) La S' være den regulære flaten i $\mathbb{R}^3$ som er gitt ved kartet

$$x = v' \cos u',\ y = v' \sin u',\ z = u'$$

der $0 < u' < 2\pi$, $-\infty < v' < \infty$. Vis at avbildningen $(0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \to (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$ gitt ved $u' = u$, $v' = \sinh v$, bestemmer en isometri $\phi : S \to S'$.

c) Vis at kurven gitt ved $v = 0$ og kurvene gitt ved $u = \theta$ der θ der er konstant, alle er geodetiske kurver på S.

Oppgave 4.

a) La $S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Vis at kurvene $\alpha(s) = (\cos(as), \sin(as), bs)$, der $a^2 + b^2 = 1$, er geodetiske kurver på S. La $p = (1, 0, 0)$. Forklar hvorfor $\exp_p$ er definert på hele T_pS.

b) T_pS kan identifiseres med $y\,z$-planet. For $\theta \in [0, 2\pi]$, la $\alpha(\phi) = (0, \sin\theta, \cos\theta) \in T_pS$. Gi et direkte utrykk for parametriseringen $X(r, \theta) = \exp_p(r\alpha(\theta)) = (x(r, \theta), y(r, \theta), z(r, \theta))$, vi får fra de geodetiske polarkoordinatene (r, θ), og finn metrikken $ds^2 = E(r, \theta)dr^2 + F(r, \theta)dr\,d\theta + G(r, \theta)d\theta^2$ i disse koordinatene.

SLUTT