UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3510/4510 — Geometriske strukturer.
Eksamensdag:	Mandag 3. desember 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Finn arealet i det hyperbolske planet $\mathbb{H}$ av den hyperbolske firkanten med hjørner $i, i+2, \sqrt{3}\,i+2, \sqrt{3}\,i$. (Dvs. sidene er hyperbolske segmenter.)

b) Finn arealet i $\mathbb{H}$ av den *Euklidske* firkanten med de samme hjørnene. (Dvs. sidene er Euklidske rette linjestykker.)

Oppgave 2.

La $S \subset \mathbb{R}^3$ være flaten med ligning $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, orientert slik at det ordnede paret av vektorer $((1,0,0),(0,1,0))$ danner en positivt orientert basis for tangentplanet i origo.

a) Parametriser S som en rotasjonsflate. La $z_0 > 0$ og finn en parametrisering ved buelengde av *breddesirkelen* $\mathcal{C}_{z_0} = \{(x,y,z) \in S \,|\, z = z_0\}$.

(Fortsettes side 2.)

b) Vi betrakter nå $\mathcal{C}_{z_0}$ som en kurve på S, med parametrisering som i a). $\mathcal{C}_{z_0}$ krysser første kvadrant av xz–planet i punktet $(\sqrt{2z_0}, 0, z_0)$. Hva er den intrinsiske normalen til $\mathcal{C}_{z_0}$ der?

Forklar hvorfor den geodetiske krumningen k_g til $\mathcal{C}_{z_0}$ må være konstant. Vis så at $k_g = \dfrac{1}{R\sqrt{1+R^2}}$, der $R = \sqrt{2z_0}$.

c) La $S_{z_0} = \{(x, y, z) \in S \,|\, z \leq z_0\}$, og bruk Gauss-Bonnets teorem til å vise at

$$\lim_{z_0 \to \infty} \iint_{S_{z_0}} K \, dA = 2\pi$$

der K er krumningen på S. (Du trenger ikke beregne K.)

Oppgave 3.

La $\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ være en kurve i rommet og anta at avbildningen $x : (0, \infty) \times (a, b) \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $x(r, t) = r\beta(t)$ definerer en parametrisering av en regulær flate $S \subset \mathbb{R}^3$.

a) Vis at det da finnes en parametrisering av S på formen $y(r, s) = r\gamma(s)$, der $\gamma(s)$ parametriserer en kurve med $|\gamma(s)| = 1$ og $|\gamma'(s)| = 1$ for alle s.

b) Beregn krumningen til S, og forklar hvorfor S må være lokalt isometrisk med en av de klassiske geometriene.

c) Angi en explisitt lokal isometri som under (b). Beskriv de geodetiske kurvene på S.

d) Anta nå mer generelt at $S \subset \mathbb{R}^3$ er en regulær flate som inneholder en kurve L som er en åpen delmengde av en rett linje i $\mathbb{R}^3$. Vis at $K(p) \leq 0$ for alle $p \in L$, der K er krumningen på S. (Hint: Bruk geodetiske polarkoordinater.)

SLUTT