UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3300/4300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Fredag 3. desember 2004.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $(X, \mathcal{M}, \mu)$ være et målrom, og anta at $1 \leq p < +\infty$. Sett $L_p = L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$. Vis følgende utsagn:

a) Hvis $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge i L_p som konvergerer mot f i L_p-norm, så vil følgen $\{\|f_n\|_p\}_{n=1}^{\infty}$ konvergere mot $\|f\|_p$.

b) Hvis $\mu(X) < +\infty$, så er $L_p \subseteq L_1$ og $\|f\|_1 \leq \mu(X)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_p$, for alle $f \in L_p$.

Oppgave 2.

La μ og ν være σ-endelige mål på et målbart rom $(X, \mathcal{M})$, og anta at

$$\nu \ll \mu.$$

(Fortsettes side 2.)

Betrakt identiteten

$$(*) \qquad \int f\, d\nu = \int f\Big(\frac{d\nu}{d\mu}\Big) d\mu$$

Vis at $(*)$ er riktig

a) for alle enkle $\mathcal{M}$-målbare funksjoner $f : X \to [0, +\infty)$,

og

b) for alle $\mathcal{M}$-målbare ikkenegative funksjoner på X.

Oppgave 3.

La λ være Lebesguemålet på Borel σ-algebraen $\mathcal{B}$ på $\mathbb{R}$. Den høyrekontinuerlige voksende funksjonen F er definert ved

$$F(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

La μ_F være det assosierte Borelmålet på $\mathbb{R}$ med F som kumulativ fordelingsfunksjon.

a) Hva mener vi med Lebesgue-dekomposisjonen av μ_F m.h.p. λ?

b) Bestem denne dekomposisjonen av μ_F.

Oppgave 4.

La $(X, \mathcal{M}, \mu)$ være et målrom, og la λ være Lebesguemålet på σ-algebraen $\mathcal{L}$ af alle Lebesguemålbare delmengder av $\mathbb{R}$. Vi lar $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$ stå for produkt σ-algebraen på $X \times \mathbb{R}$.

Anta at $f : X \to [0, +\infty)$ er $\mathcal{M}$-målbar, og definer $g : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$g(x, y) = f(x)y - y^2, \qquad x \in X, \quad y \in \mathbb{R}$$

La $E \in \mathcal{M}$, og sett

$$F = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x), x \in E\}$$

a) Vis at g er $\mathcal{M} \times \mathcal{L}$-målbar og at $F \in \mathcal{M} \times \mathcal{L}$.

b) Anta nå at μ er σ-endelig. Vis at

$$\int_F g\, d(\mu \times \lambda) = \int_E \tfrac{1}{6} f(x)^3 d\mu(x).$$

SLUTT