UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3300/4300/9300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Mandag 4. desember 2006.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ være et målrom og sett

$$\boldsymbol{C} = \{ E \subset X | E \cap F \in \boldsymbol{X} \ \text{ for alle } \ F \in \boldsymbol{X} \ \text{ med } \ \mu(F) < +\infty \}.$$

a) Vis at $\boldsymbol{C}$ er en σ-algebra.

   $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ kalles et mettet målrom hvis $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$.

   Vis at et σ-endelig målrom er mettet.

b) Definer $\bar{\mu} : \boldsymbol{C} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ved $\bar{\mu}(E) = \mu(E)$ hvis $E \in \boldsymbol{X}$ og $\bar{\mu}(E) = +\infty$ hvis $E \notin \boldsymbol{X}$.

   Vis at $(X, \boldsymbol{C}, \bar{\mu})$ alltid er et mettet målrom.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

a) La $(X, \boldsymbol{X})$ være et målbart rom og la ν og μ være to mål på $\boldsymbol{X}$.

Forklar hva det betyr at ν er absolutt kontinuerlig med hensyn på μ (notasjon: $\nu << \mu$).

Forklar hva det betyr at ν og μ er innbyrdes singulære (notasjon: $\nu \perp \mu$).

La $\mathbb{N}$ være de positive hele tall og la $\boldsymbol{X}$ være σ-algebraen av delmengder av $\mathbb{N}$. La

$$\mathbb{J} = \{\, 2n \,|n \in \mathbb{N}\,\}.$$

La μ være tellemålet på $\boldsymbol{X}$ (dvs. $\mu(E)$ er antall elementer i E hvis E er endelig og $\mu(E) = +\infty$ hvis E ikke er endelig). La ν være målet definert på $\boldsymbol{X}$ gitt ved

$$\nu(E) = \sum_{n \in E \cap \mathbb{J}} \frac{1}{n^2}.$$

Avgjør om $\nu << \mu$ eller om $\mu << \nu$ (du må begrunne svaret). I de eventuelle tilfeller der et av målene er absolutt kontinuerlig med hensyn på det andre, finn også det første målets Radon-Nikodym derivert med hensyn på det andre.

b) Hva sier Lebesgues dekomposisjons teorem ?

Angi en Lebesgues dekomposisjon av μ med hensyn på ν (μ og ν som i pkt. a)).

Oppgave 3.

I denne oppgaven er $\boldsymbol{B}$ σ-algebraen av Borelmengder på forskjellige intervaller $I \subset \mathbb{R}$ og λ er Lebesguemålet på $\boldsymbol{B}$.

a) Betrakt målrommet $((0,1), \boldsymbol{B}, \lambda)$. La $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f_n(x) = (\sin x^n) x^{-n}.$$

Finn $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\lambda$.

(Hvis du trenger det i din argumentasjon, kan du bruke uten å bevise det at $\frac{\sin t}{t}$ er en avtakende funksjon på $(0,1)$.)

(Fortsettes side 3.)

Betrakt målrommet $([-\frac{1}{2}, 1], \boldsymbol{B}, \lambda)$. La $g_n : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$g_n(x) = \begin{cases} (\sin x^n)x^{-n+1} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Finn $\lim_{n \to +\infty} \int g_n \, d\lambda$.

b) Betrakt målrommet $([1, +\infty), \boldsymbol{B}, \lambda)$. La $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f_n(x) = \frac{n}{nx^{\frac{1}{3}} + 1}.$$

Vis at $f_n \in L_p$ for $3 < p < +\infty$. Avgjør om $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ er en konvergent følge i L_p og finn i så fall grensen til denne følgen (fortsatt $3 < p < +\infty$).

c) La $(X, \boldsymbol{X})$ være et målbart rom og la ν være et fortegnsmål (engelsk: charge) på $\boldsymbol{X}$. Forklar hva en Hahn-dekomposisjon av X med hensyn på ν er.

Betrakt målrommet $([0, +\infty), \boldsymbol{B}, \lambda)$. La $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = (\sin x)e^{-x}.$$

Da er f integrabel og $\nu(E) = \int_E f d\lambda$ vil definere et fortegnsmål ν på $\boldsymbol{B}$ (det er ikke meningen du skal vise dette).

Angi en Hahn-dekomposisjon av $[0, +\infty)$ med hensyn på ν.

Oppgave 4.

I denne oppgaven kan du bruke uten bevis at om μ_1 og μ_2 er to σ-endelige mål på en σ-algebra med $\mu_1 << \mu_2$ og f er en ikke negativ målbar funksjon, så er $\int f \, d\mu_1 = \int f \, \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \, d\mu_2$.

a) La $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ og $(Y, \boldsymbol{Y}, \nu)$ være to σ-endelige målrom. La $Z = X \times Y$ og la $\boldsymbol{Z}$ være σ-algebraen generert av rektangler $A \times B$ der $A \in \boldsymbol{X}$ og $B \in \boldsymbol{Y}$. La $\pi = \mu \times \nu$ være produktmålet av μ og ν på $\boldsymbol{Z}$. La $f : X \to \mathbb{R}$ og $g : Y \to \mathbb{R}$ være to ikke negative, henholdsvis $\boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{Y}$ målbare og henholdsvis μ og ν integrable funksjoner. Definer mål $\tilde{\mu}$ og $\tilde{\nu}$ på $\boldsymbol{X}$ og $\boldsymbol{Y}$ ved

$$\tilde{\mu}(E) = \int_E f \, d\mu \text{ og } \tilde{\nu}(F) = \int_F g \, d\nu.$$

(Fortsettes side 4.)

La $\tilde{\pi} = \tilde{\mu} \times \tilde{\nu}$ være produktmålet på $\boldsymbol{Z}$ av disse målene. La $F : Z \to \mathbb{R}$ være definert ved $F(x, y) = f(x)g(y)$. Vis at

$$\tilde{\pi}(G) = \int_G F \, d\pi,$$

for alle $G \in \boldsymbol{Z}$.

b) La $(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ og $f : X \to \mathbb{R}$ være som i pkt. a), men la nå $(Y, \boldsymbol{Y}, \nu) = ([0, +\infty), \boldsymbol{B}, \lambda)$ (notasjon som i Oppgave 3).

Vis at:

$$\int_X f^2 \, d\mu = 2 \int_{[0,+\infty)} t \, \mu\{x \,|\, f(x) \geq t\} \, d\lambda.$$

(Hint: Du kan her bruke, uten bevis, at funksjonen $H(x, t) = 2t\,(\chi_{[0,f(x)]}(t))$ er $\boldsymbol{Z}$-målbar og så integrere H over Z med hensyn på π.)

SLUTT