UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3300/4300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Tirsdag 4. desember 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Du bør begrunne alle svar.

Oppgave 1.

I denne oppgaven står λ for Lebesgue-målet på $\sigma-$algebraen $\mathcal{B}$ av alle Borel mengder i $\mathbb{R}$.

a) Funksjonen F er gitt ved

$$F(x) = \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} & \text{hvis } \ 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Definer et mål μ på $\mathcal{B}$ ved

$$\mu(E) = \int_E F \ \mathrm{d}\lambda, \qquad E \in \mathcal{B}.$$

Beregn $\mu(\mathbb{R})$, og bestem

$$\lim_{n\to\infty} n \int \sin(\frac{x}{n}) \ \mathrm{d}\mu(x)$$

b) Hva mener vi med Lebesgue-dekomposisjonen til λ med hensyn på μ? Finn denne dekomposisjonen til λ.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Nedenfor kan du bruke uten bevis at enhver åpen delmengde av $\mathbb{R}^2$ kan skrives som en tellbar union av rektangler $A \times B$ der A og B er åpne intervall i $\mathbb{R}$.

I det følgende lar vi $\mathcal{D}$ være $\sigma-$algebraen i $\mathbb{R}^2$ generert av alle rektangler $A \times B$ der A og B er åpne intervall i $\mathbb{R}$. La $(X, \mathcal{C}, \mu)$ være et målrom der μ er et endelig mål, $\mu(X) < +\infty$.

a) Hva forstår vi med en $\mathcal{C}$-målbar funksjon $f : X \to \mathbb{R}$, og hva forstår vi med en $(\mathcal{C},\, \mathcal{D})$-målbar funksjon $g : X \to \mathbb{R}^2$?

   Vis at hver kontinuerlig funksjon $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er $\mathcal{D}$-målbar.

b) La f og g være reelle funksjoner definert på X, og definer $F : X \to \mathbb{R}^2$ ved

$$F(x) = (f(x),\, g(x)), \qquad x \in X.$$

   Vis at F er $(\mathcal{C},\, \mathcal{D})$-målbar hvis og bare hvis f og g er $\mathcal{C}$-målbare.

c) Bruk (a) and (b) til å vise utsagnet: f og g er $\mathcal{C}$-målbar $\Longrightarrow$ $f + g$ er $\mathcal{C}$-målbar.

d) La $\phi : X \to \mathbb{R}^2$ være en $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-målbar funksjon. Vi definerer et mål $\mu_\phi : \mathcal{D} \to [0, +\infty]$ ved $\mu_\phi(E) = \mu(\phi^{-1}(E))$, $\quad E \in \mathcal{D}$ (det er ikke meningen du skal vise at μ_ϕ er et mål). Vis at

$$\int_{\mathbb{R}^2} h \, \mathrm{d}\mu_\phi = \int_X h \circ \phi \, \mathrm{d}\mu$$

   for alle μ_ϕ-integrerbare funksjoner $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

e) Anta f og g er $\mathcal{C}$-målbare reelle funksjoner på X som oppfyller

$$(*) \quad \mu(f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)) = \mu(f^{-1}(A))\mu(g^{-1}(B)), \qquad \text{for alle} \;\; A, B \in \mathcal{B}.$$

   Vi lar

$$\phi(x) = (f(x), g(x)), \quad x \in X.$$

   Vis at

$$\mu_\phi = \mu_f \times \mu_g$$

   der $\mu_f \times \mu_g$ betegner produkt-målet på $\mathcal{D}$.

f) Vis at for alle μ-integrerbare f og g, så er

$$\int fg \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu \int g \, \mathrm{d}\mu, \quad \text{for alle integrerbare } f \text{ og } g \text{ som oppfyller } (*).$$

   Vink: Bruk (d) og (e).

SLUTT