UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT4300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Torsdag 2. Desember, 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1, 2a, 2b etc.) teller 10 poeng.

Oppgave 1

La λ være Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$. Vis at for alle integrerbare funksjoner $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ er

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \, d\lambda$$

Oppgave 2

I denne oppgaven er $(X, \mathcal{A})$ et målbart rom, og $\mathcal{M}^+$ mengden av ikke-negative, målbare funksjoner $f : X \to [0, \infty]$. Anta at $I : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ oppfyller følgende tre betingelser:

(i) $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ for alle $\alpha \in [0, \infty)$ og alle $f \in \mathcal{M}^+$.

(ii) $I(f + g) = I(f) + I(g)$ for alle $f, g \in \mathcal{M}^+$.

(iii) Dersom $\{f_n\}$ er en voksende følge fra $\mathcal{M}^+$ som konvergerer mot f, så er $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$.

a) Vis at $I(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = I(f_1) + I(f_2) + \cdots + I(f_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{M}^+$.

b) Vis at dersom $f, g \in \mathcal{M}^+$ og $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in X$, så er $I(f) \leq I(g)$.

c) Vis at

$$\mu(E) = I(\mathbf{1}_E) \quad \text{for } E \in \mathcal{A}$$

definerer et mål på $(X, \mathcal{A})$.

d) Vis at $I(f) = \int f \, d\mu$ for alle ikke-negative, enkle funksjoner f.

e) Vis at $I(f) = \int f \, d\mu$ for alle $f \in \mathcal{M}^+$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

I denne oppgaven er X mengden av alle følger $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der hver x_n er enten 0 eller 1. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ er en vektor som bare består av 0'er og 1'ere, kaller vi

$$C_{\mathbf{a}} = \{\{x_n\} \in X \mid x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k\}$$

en *sylindermengde* med lengde k. Vi lar $\mathcal{C}$ være samlingen av alle sylindermengder (av alle lengder) pluss den tomme mengden $\emptyset$.

a) Vis at dersom $C_{\mathbf{a}}$ og $C_{\mathbf{b}}$ er sylindermengder, så er de enten disjunkte, like, eller den ene er inneholdt i den andre..

b) Vis at $\mathcal{C}$ er en semi-ring på X. (Definisjonen av en semi-ring finner du til slutt i oppgavesettet).

c) Anta at sylindermengden $C_{\mathbf{a}}$, der $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, er en disjunkt union av to andre, ikkje-tomme sylindermengder. Vis at disse to mengdene må være $C_{\mathbf{a}0}$ og $C_{\mathbf{a}1}$, der $\mathbf{a}0 = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0)$ og $\mathbf{a}1 = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 1)$

Definér en funksjon $\rho : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ ved

$$\rho(C) = \begin{cases} 0 & \text{dersom } C = \emptyset \\ \\ 2^{-k} & \text{dersom } C \text{ er en sylindermengde med lengde } k \end{cases}$$

d) Vis først at dersom en sylindermengde C er en disjunkt union av to andre, ikke-tomme sylindermengder D og E, så er $\rho(C) = \rho(D) + \rho(E)$. Vis så at dersom en sylindermengde C er en disjunkt union av endelig mange sylindermengder $C_1, C_2, \ldots, C_k$, så er $\rho(\mathrm{C}) = \rho(C_1) + \rho(C_2) + \ldots + \rho(C_k)$. (*Hint:* Bruk induksjon på k, og observer at dersom $C = C_{\mathbf{a}}$, så faller mengdene $C_1, C_2, \ldots, C_k$ i to kategoriar: de som er inneholdt i $C_{\mathbf{a}0}$, og de som er inneholdt i $C_{\mathbf{a}1}$.)

Vi fremsetter en påstand:

Påstand: Dersom en sylindermengde C er en disjunkt union av tellbart mange mengder $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathcal{C}$, så er alle unntatt endelig mange C_n'er tomme, dvs. $C = \bigcup_{n=1}^{N} C_n$ for en $N \in \mathbb{N}$.

e) Anta at påstanden er korrekt og vis at ρ kan utvides til et mål på $\sigma(\mathcal{C})$.

f) Bevis påstanden. (*Hint:* Anta for motsigelse at $C \setminus \bigcup_{n=1}^{N} C_n \neq \emptyset$ for alle $N \in \mathbb{N}$. Kall en vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ av 0'er og 1'ere en *potensiell vinner* dersom det for alle N finnes et element $\mathbf{x} = \{x_n\} \in C \setminus \bigcup_{n=1}^{N} C_n$ som starter med $\mathbf{a}$ (dvs. $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots x_k = a_k$). Bevis at det finnes en følge $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$ av potensielle vinnere slik at hver $\mathbf{a}_n$ er en utvidelse av den forrige. Bruk dette til å finne en $\mathbf{x} \in C \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.)

(Fortsettes på side 3.)

Opplysninger

Definisjon av en semi-ring: En *semi-ring* på X er en samling $\mathcal{S}$ av delmengder av X slik at:

(i) $\emptyset \in \mathcal{S}$

(ii) Dersom $S, T \in \mathcal{S}$, så er $S \cap T \in \mathcal{S}$

(iii) Dersom $S, T \in \mathcal{S}$, så finnes det en endelig, disjunkt samling mengder $S_1, S_2, \ldots, S_n$ i $\mathcal{S}$ slik at $S \setminus T = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$.

SLUTT