UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT4300 — Mål- og integrasjonsteori.
Eksamensdag:	Torsdag 1. desember 2011.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1

I denne oppgaven er X en uendelig mengde. En delmengde A av X kalles *ko-tellbar* dersom komplementet $A^c = X \setminus A$ er tellbart. La

$$\mathcal{A} = \{a \subset X \ : \ A \text{ er enten tellbar eller ko-tellbar}\}$$

være samling av alle tellbare og ko-tellbare delmengder av X (vi regner endelige mengder, inkludert $\emptyset$, som tellbare).

a) Vis at $\mathcal{A}$ er en σ-algebra.

Definer $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ved

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{hvis } A \text{ er en endelig mengde med } n \text{ elementer} \\ \\ \infty & \text{hvis } A \text{ er en uendelig mengde} \end{cases}$$

b) Vis at μ er et mål.

Oppgave 2

I denne oppgaven er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et målrom, $f : X \to \mathbb{R}$ en ikke-negativ, integrerbar funksjon, og ν er målet på $(X, \mathcal{A})$ gitt ved

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

a) Vis at

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu$$

for alle ikke-negative, enkle funksjoner g.

(Fortsettes på side 2.)

b) Vis at

$$\int g\,d\nu = \int gf\,d\mu$$

for alle ikke-negative, målbare funksjoner g.

Oppgave 3

I denne oppgaven er m Lebesgue-målet på $\mathbb{R}$, mens μ er tellemålet på $\mathbb{N}$ (dvs. $\mu(\{n\}) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$). La $\nu = m \times \mu$ være produktmålet og la

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

være gitt ved

$$f(x, n) = \frac{1}{1 + (2^n x)^2}$$

Regn ut $\int f\,d\nu$. Du kan anta uten bevis at f er ν-målbar. Husk at $\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C$.

Oppgave 4

I denne oppgaven er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et *endelig* målrom (dvs. at $\mu(X) < \infty$) og alle funksjoner er målbare funksjoner fra X til $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{(-\infty, \infty)\}$. Vi benytter den forkortede skrivemåten

$$\{f > M\} = \{x \in X \,:\, f(x) > M\}$$

a) Anta at f er ikke-negativ. Vis at f er integrerbar hvis og bare hvis det finnes et tall $M \in \mathbb{R}$ slik at

$$\int_{\{f>M\}} f\,d\mu < \infty$$

b) Anta at f er ikke-negativ og integrerbar. Vis at

$$\lim_{M\to\infty} \int_{\{f>M\}} f\,d\mu = 0$$

c) Anta at $\{f_n\}$ er en følge av ikke-negative, integrerbare funksjoner som konvergerer punktvis til f. La $M \in \mathbb{R}$. Vis at

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\{f_n>M\}} f_n(x) \geq \mathbf{1}_{\{f>M\}} f(x)$$

d) La $\{f_n\}$, f og M være som ovenfor. Vis at dersom

$$\int_{\{f_n>M\}} f_n(x)\,d\mu \leq \alpha$$

for alle n, så er

$$\int_{\{f>M\}} f(x)\,d\mu \leq \alpha$$

(Fortsettes på side 3.)

En følge $\{f_n\}$ av ikke-negative funksjoner kalles *uniformt integrerbar* dersom

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{f_n>M\}} f_n\,d\mu\right)=0$$

(det kan være nyttig å sammenligne med punkt b)).

e) Anta at $\{f_n\}$ er en uniformt integrerbar følge av ikke-negative funksjoner som konvergerer punktvis til f. Vis at f er integrerbar.

f) La $\{f_n\}$ og f være som i punkt e). Vis at $\{f_n\}$ konvergerer mot f i L^1-norm, dvs. at

$$\|f-f_n\|_{L^1(\mu)}=\int|f-f_n|\,d\mu\to 0\quad\text{når } n\to\infty$$

Slutt