UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT4410 — Avansert Lineær Analyse
Eksamensdag:	15. desember 2011
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

(**a**) Hva sier Hahn-Banach teoremet for reelle vektorrom? Gjengi hovedtrekkene i beviset av teoremet.
(**b**) Gi to anvendelser av Hahn-Banach teoremet. Inkluder bevis for én av anvendelsene.

Oppgave 2

(**a**) La μ og ν være to mål definert på et målbart rom (X, Σ). Hva vil det si at $\mu \perp \nu$? Gi et eksempel der $\mu \perp \nu$ og $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$.
(**b**) Anta at μ og ν er σ-endelige mål på (X, Σ). Hva mener vi med Lebesgue dekomposisjonen av ν med hensyn på μ ?
La $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den voksende, høyre kontinuerlige funksjonen gitt ved

$$(1) \quad F(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

og la μ_F være det tilordnete Borelmålet med F som fordelingsfunksjon (distribusjonsfunksjon).
Bestem Lebesgue dekomposisjonen til μ_F mhp. Lebesguemålet λ.
(**c**) Vis at

$$\int g \, \mathrm{d}\mu_F = g(1) + \int_{[1,+\infty)} \frac{g(x)}{x^2} \, \mathrm{d}\lambda(x)$$

for alle ikkenegative Borelmålbare funksjoner g på $\mathbb{R}$. Her er F og μ_F som i oppgave (b).

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

La (X, Σ, μ) være et målrom med $\mu(X) < \infty$, og la $\emptyset \neq M \subseteq \Sigma$. (M behøver ikke å være tellbar.) Vi antar at M er lukket under tellbare unioner,

$$E_n \in M,\ n = 1, 2, 3, \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M,$$

og definerer

$$\nu(A) = \sup_{E \in M} \mu(A \cap E), \text{ for alle } A \in \Sigma.$$

(**a**) Vis at ν er et mål på Σ.
(**b**) Vis at det fins en målbar funksjon g på X slik at $0 \leq g \leq 1$ og

$$\nu(A) = \int_A g \, \mathrm{d}\mu, \qquad \text{for alle } A \in \Sigma$$

Oppgave 4

(**a**) Hva sier prinsippet om uniform begrensethet for Banachrom?
(**b**) La X og Y være to Banachrom, og anta at $B : X \times Y \to \mathbb{C}$ er en bilineær avbildning som er (separat) kontinuerlig i hver variabel. Vis at

$$B(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

hvis $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i X og $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i Y.
Vink:
Betrakt lineæravbildninger $T_n : Y \to \mathbb{C}$, der $T_n(y) = B(x_n, y),\ n \in \mathbb{N}$.

SLUTT