Eksamen i MAT 4410

15.12.2011

Løsninger.

Vi henviser til lærebøkene for Oppgave 1 og Oppgave 4(a).

Oppgave 2

(a) At $\mu \perp \nu$ vil si at det fins disjunkte mengder $A, B \in \Sigma$, $A \cup B = X$,

$$\nu(A) = 0 \quad , \quad \mu(B) = 0.$$

La λ være Lebesguemålet på Borel σ-algebraen $\mathcal{B}$ på $\mathbb{R}$, δ_x = punktmålet i x (der $x \in \mathbb{R}$ er vilkårlig, fast). Da er

$$\delta_x(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0 \quad , \quad \lambda(\{x\}) = 0,$$

så $\delta_x \perp \lambda$.

Alternativ: La $x \neq y$ i $\mathbb{R}$. Da er $\delta_x \perp \delta_y$ (på σ-algebraen $\mathcal{B}$).

(b)
La μ og ν være σ-endelige mål på (X, Σ).
Da fins mål $\nu_\perp$ og ν_a slik at

$$\nu = \nu_\perp + \nu_a,$$

$\nu_\perp \perp \mu$ og $\nu_a \ll \mu$. $\nu_\perp$ og ν_a er éntydige.
Dette kalles Lebesguedekomposisjonen av ν mhp. μ.

La nå

$$F(x) = \begin{cases} 2 - 1/x & , \text{hvis } x \geq 1 \\ 0 & , \text{hvis } x < 1 \end{cases} , \quad F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \begin{cases} 1/x^2 & , x > 1 \\ 0 & , x < 1 \end{cases}$$

Da er

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \quad , \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$= \int_{(a,b]} F'(t)\, d\lambda(t)$$

$$\mu_F\{1\} = \mu_F\left(\bigcap_1^\infty (1, 1+\tfrac{1}{n}]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_F(1, 1+\tfrac{1}{n}]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[F(1+\tfrac{1}{n}) - F(1)\right] = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \tfrac{n}{n+1} - 0\right) = 1$$

Alternativ: $\mu_F\{1\} = \lim_{n\to\infty} \mu_F(-\tfrac{1}{n}, 1] = \lim_{n\to\infty} (1-0) = 1.$

La $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $B = \{1\}$

$$\mu_F = (\mu_F)_\perp + (\mu_F)_a$$

$$(\mu_F)_\perp(E) = \begin{cases} 1 & , \text{hvis } 1 \in E \\ 0 & , \text{hvis } 1 \notin E \end{cases} = \text{punktmålet i } 1 = \delta_1 .$$

$$(\mu_F)_a(E) = \mu_F(E \cap A) = \int_{A\cap E} F'\, d\lambda$$

$$\mu_F(E) = \mu_F(E\cap A) + \mu_F(E\cap B) = \int_{A\cap E} F'\, d\lambda + \delta_1(E)$$

Oppgave 2 (c)

La $g \geq 0$ være en Borelfunksjon på $\mathbb{R}$. Vi skal vise at

$$(*) \quad \int g \, d\mu_F = g(1) + \int_{[1,+\infty)} \frac{g(x)}{x^2} \, d\lambda(x)$$

Vi vet fra (b) at

$$\mu_F(E) = \int_{A \cap E} F \, d\lambda + \delta_1(E) \quad , \quad E \in \mathcal{B},$$

så (*) holder for karakteristiske funksjoner χ_E ($E \in \mathcal{B}$):

$$\int \chi_E \, d\mu_F = \mu_F(E) = \int_{[1,+\infty)} \chi_E(x) \frac{1}{x^2} \, d\lambda(x) + \chi_E(1)$$

Altså holder (*) for alle simple (enkle) Borelfunksjoner $\varphi \geq 0$. For $g \geq 0$ en Borelfunksjon, følger (*) av Monoton Konvergens Teorem anvendt på en voksende følge $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ av simple Borelfunksjoner slik at $\varphi_n \nearrow g$.

Oppgave 3.

(a) At $\nu \geq 0$ er klart fra definisjonen, siden $\mu \geq 0$. Videre er

$$\nu(\emptyset) = \sup_{E \in M} \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Anta så at $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$, og at $A_n \cap A_m = \emptyset$, $m \neq n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

For $\varepsilon > 0$ vilkårlig, velg $E \in M$ slik at

$$\mu\left(\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) \cap E\right) \geq \nu\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) - \varepsilon.$$

Da

$$\mu\left(\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) \cap E\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) \leq \sum_1^{\infty} \nu(A_n),$$

ser vi at

$$\nu\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) \leq \sum_1^{\infty} \nu(A_n).$$

Omvendt, hvis $\varepsilon > 0$ er gitt, velg for hver $n \in \mathbb{N}$, en $E_n \in M$ slik at

$$\nu(A_n) \leq \mu(A_n \cap E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Da er

$$\sum_1^{\infty} \nu(A_n) \leq \sum_1^{\infty} \mu(A_n \cap E_n) - \varepsilon \quad \left(\text{siden } \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_1^{\infty} A_n \cap E_n\right) - \varepsilon \leq \mu\left(\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_1^{\infty} E_n\right)\right) - \varepsilon$$

$$\leq \nu\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) - \varepsilon$$

siden $\bigcup_1^\infty E_n \in M$ per hypotese.

Dermed følger at

$$\nu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \sum_1^\infty \nu(A_n)$$

Altså er ν et mål på Σ.

3(b) Vi ser at $\nu << \mu$:

$$\mu(A)=0,\ A\in\Sigma \Rightarrow \nu(A)=0$$

siden $\mu \geq \nu$.

Da μ er endelig, er ν endelig, så Radon-Nikodym teoremet gir at det fins en målbar $g \geq 0$ slik at

$$\nu(A) = \int_A g\,d\mu \quad , \text{ for alle } A\in\Sigma .$$

Videre er

$$\int_A g\,d\mu \leq \int_A 1\,d\mu = \mu(A) \ , \qquad A \in \Sigma ,$$

da $\nu \leq \mu$. Altså må $1-g \geq 0$ (μ-n.o.a.)

Ved å redefinere g på en mengde av μ-mål 0 (om nødvendig), kan vi da anta at

$$0 \leq g(x) \leq 1 \ , \quad \text{for alle } x \in X .$$

Oppgave 4

(b) $B : X \times Y \to \mathbb{C}$ er bilineær og separat kontinuerlig i de to variable. For fast $n \in \mathbb{N}$

er $T_n = B(x_n, \cdot)$

da en kontinuerlig lineær funksjonal på Y.

Dessuten er avbildningen

$$x \mapsto B(x, y), \quad X \to \mathbb{C},$$

lineær og kontinuerlig for hver fast $y \in Y$.

Hvis $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ i X, vil derfor

$$T_n(y) = B(x_n, y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{for hver fast } y \in Y).$$

Dermed fins $n_0 = n_0(y)$ slik at

$$|T_n(y)| \leq 1, \quad \text{for } n \geq n_0(y).$$

Sett $M_y = \text{maks}\{|T_1(y)|, \ldots, |T_{n_0-1}(y)|, 1\}$

Da er $|T_n(y)| \leq M_y \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$

Dermed er betingelsene i Uniform Begrensethets Prinsippet oppfylt for familien $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$. Altså fins en $M > 0$

slik at $\|T_n\| \leq M \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$

Da er $|B(x_n, y_n)| = |T_n(y_n)| \leq M\|y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

så $\lim_{n\to\infty} B(x_n, y_n) = 0$. ∎