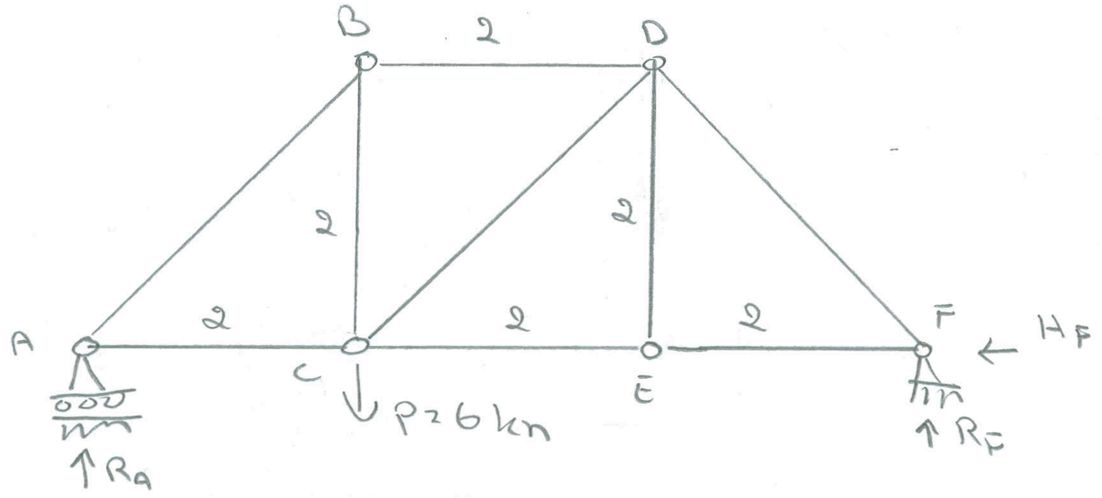
MEK1500 - HØST 2009

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1



a) Statisk bestemthet kan bestemmes fra (for plane fagverk)

$$m + r = 2j$$

der

m - antall staver
r - antall reaksjons-/opplagerkrefter
j - antall knutepunkter

I dette tilfellet er

$m = 9$

$r = 3$ (R_A, R_F, H_F) } 12

ekvivalent ⇒ STATISK BESTEMT

$2j = 2 \cdot 6$ } 12

b) Reaksjonskreftene:

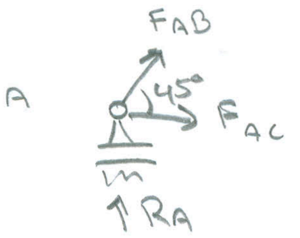
Fra likevekt:

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow R_A \cdot 6 - P \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{4}{6} P = \underline{\underline{4\,kN}}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_F = \underline{\underline{0}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_F - P = 0 \Rightarrow R_F = P - R_A = \underline{\underline{2\,kN}}$$

c) Stavkreftene i punkt A:



$$\sum F_y = 0 \qquad F_{AB} \sin 45° + R_A = 0 \Rightarrow F_{AB} = -\frac{R_A}{\sin 45°}$$

$$= -\frac{4}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{-5{,}66\,kN}}$$

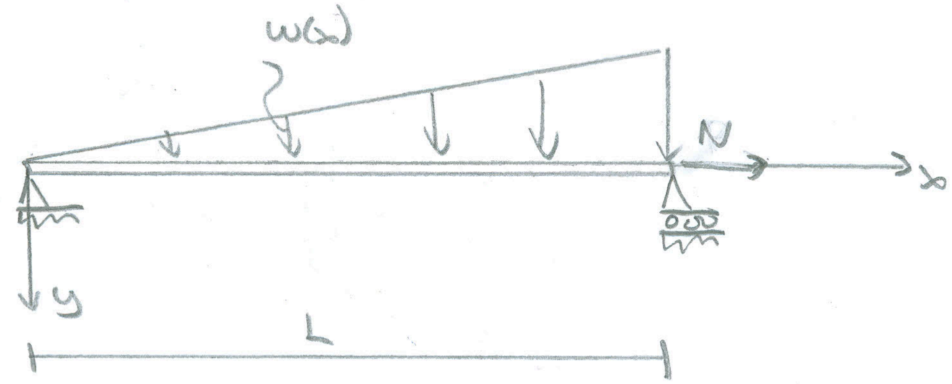
(trykk)

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{AB} \cos 45° + F_{AC} = 0$$

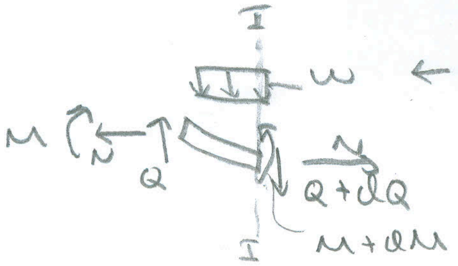
$$\Rightarrow F_{AC} = -F_{AB} \cos 45° = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \underline{\underline{4\,kN}}$$

(strekk)

Oppgave 2



a) På et inifinitesimalt element av bjelken virker følgende krefter



Pga aksiallasten, stiller vi opp likevekt for deformert konstruksjon

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - N = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q + dQ - Q + w\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dx} = -w \qquad (2)$$

$$\sum M_I = 0 \Rightarrow -Q\,dx - M + \underbrace{w\,dx\,\frac{dx}{2}}_{\text{neglisjeres}} + M + dM + N\,dv = 0$$

$$\underline{\underline{\frac{dM}{dx} = Q - N\frac{dv}{dx}}} \qquad (3)$$

b) Fra (1) følger det at mellom to snitt kan uttrykkes som

$$Q = Q_0 - \int_0^x \frac{qx}{L}\,dx = \underline{Q_0 - \frac{qx^2}{2L}}$$

Fra (3), gitt at $N=0$, følger det at

$$M = M_0 + \int_0^x Q\,dx = M_0 + \int_0^x \left(Q_0 - \frac{qx^2}{2L}\right)dx$$

$$= \underline{M_0 + Q_0 x - \frac{qx^3}{6L}}$$

Bestemmer Q_0 og M_0 fra ranbetingelser:

1) $M=0$ for $x=0$ $\Rightarrow$ $\underline{M_0 = 0}$

2) $M=0$ for $x=L$ $\Rightarrow$ $Q_0 = \underline{\frac{qL}{6}}$

Det gir

$$Q = \frac{qL}{6} - \frac{qx^2}{2L} \qquad (4)$$

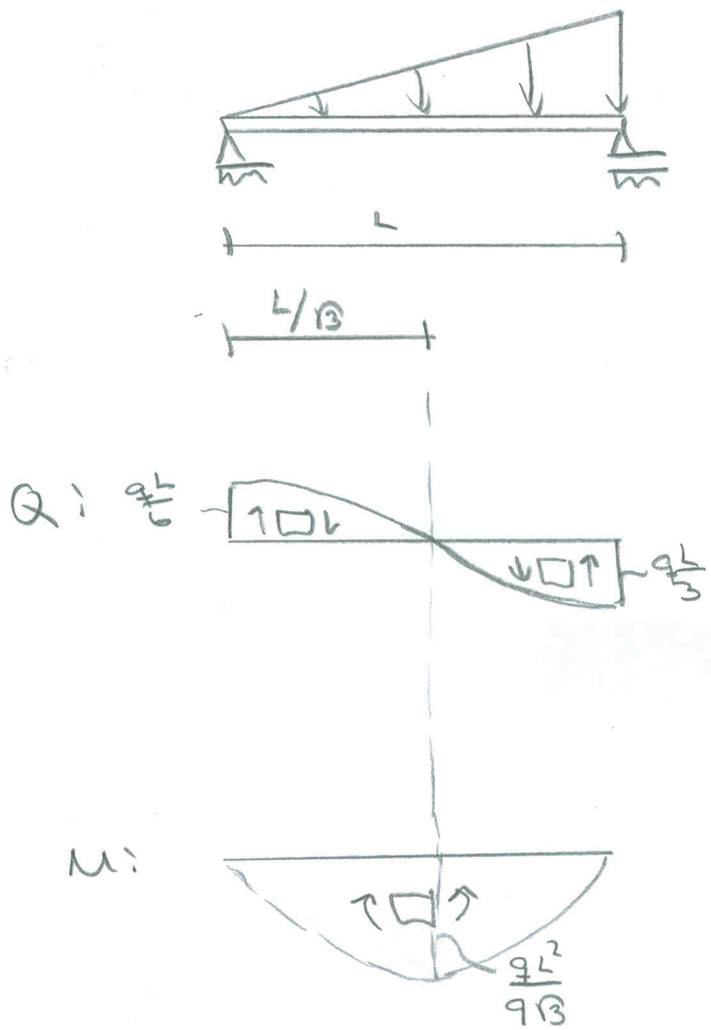
$$M = \frac{qL}{6}x - \frac{qx^3}{6L} \qquad (5)$$

Posisjon hvor $Q=0$: $\frac{qL}{6} = \frac{qx^2}{2L} \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{L}{\sqrt{3}}}}$

Siden $\frac{dM}{dx} = Q = 0$ ved $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ er dette mulig makspunkt for M.

$$M_{maks} = \frac{qL}{6}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) - \frac{q}{6L}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{qL^2}{9\sqrt{3}}}}$$

c) Skjærkraft- og momentdiagram



d) Differensiallikningen

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad (6)$$

Randbetingelsene:

I) $x = 0$: $v = 0$

II) $x = L$ $v = 0$

e) Nedbøyningen av bjelken som funksjon av x

Fra (4) har vi momentfordelingen

Innsatt i (6) gir

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M(x) = \frac{q}{6L}x^3 - \frac{qL}{6}x$$

Integrerer to ganger

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{q}{24L}x^4 - \frac{qL}{12}x^2 + C$$

$$EIv = \frac{q}{120L}x^5 - \frac{qL}{36}x^3 + Cx + D$$

Benytter randbetingelsene til å bestemme C og D.

I) gir $\underline{D = 0}$

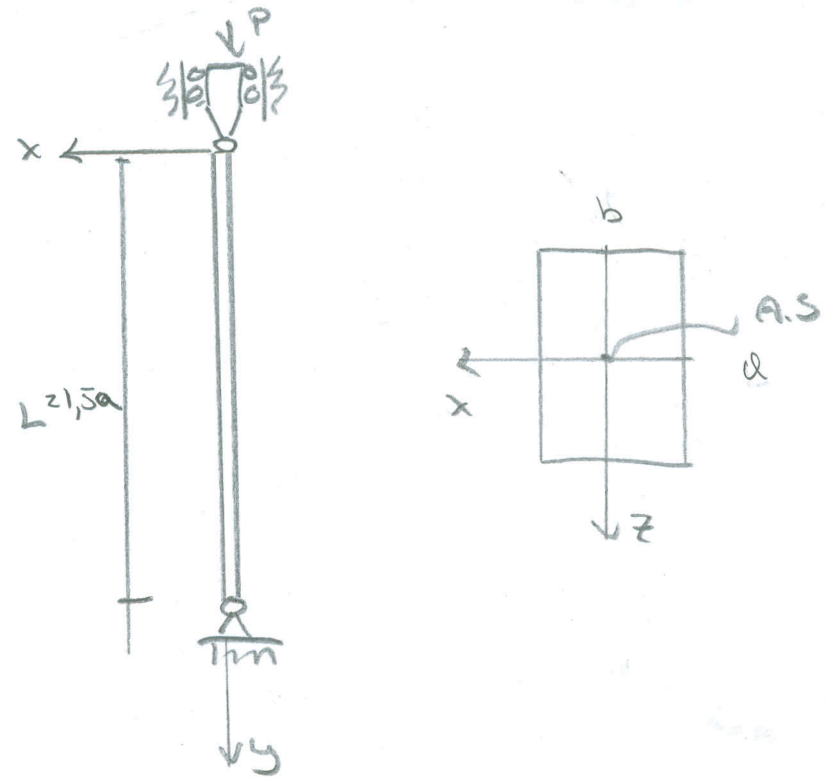
II) $$CL = \frac{qL}{36}L^3 - \frac{q}{120L}L^5$$

$$\underline{C = \frac{7}{360}qL^3}$$

Det gir

$$\underline{\underline{v(x) = \frac{q}{120L}x^5 - \frac{qL}{36}x^3 + \frac{7}{360}qL^3x}}$$

Oppgave 3



a) Knekklasten for en ledded søyle

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\frac{3}{2}a)^2} = \frac{\pi^2 EI}{\frac{9}{4}a^2} = \underline{\underline{\frac{4\pi^2 EI}{9a^2}}}$$

b) Gitt fasongen på tverrsnittet er

$I_x > I_z$ og søylen vi knekke i planet (x-y)

$$I_z = \int_A x^2 \, dA = \underline{\frac{1}{12} bd^3}$$

Kritiske trykkspenning:

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{\frac{4\pi^2 EI_z}{9a^2}}{bd} = \frac{4\pi^2 EI_z}{9a^2 bd} = \frac{4\pi^2 E \frac{bd^3}{12}}{9a^2 bd}$$

$$= \frac{\pi^2 E bd^3}{27a^2 bd} = \underline{\underline{\frac{\pi^2 E d^2}{27a^2}}}$$