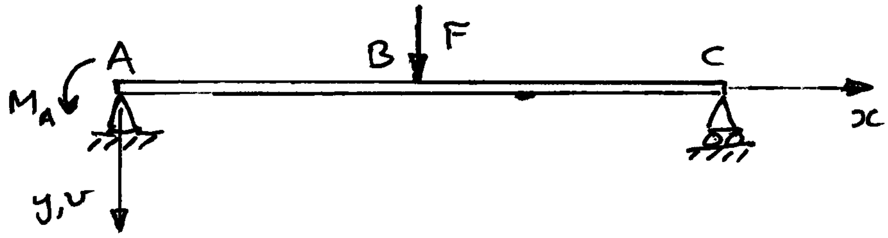
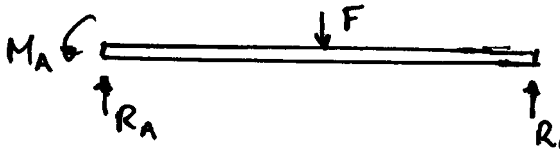
MEK2500 - H14 Løsningsforslag

Oppgave 1



(a) Fritt legemediagram for hele bjelken:



Ingen horisontale krefter

$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + R_C L - F\,L/2 = 0$

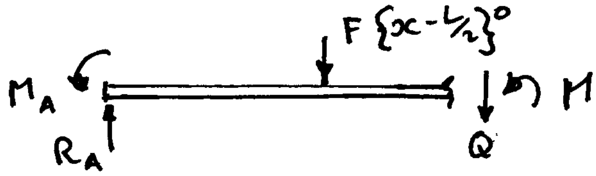
$$\underline{\underline{R_C = \frac{F}{2} - \frac{M_A}{L}}}$$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C - F = 0$

$$R_A = F - \left(\frac{F}{2} - \frac{M_A}{L}\right) = \underline{\underline{\frac{F}{2} + \frac{M_A}{L}}}$$

(b) $N=0$ for alle x-verdier.

For å finne M, Q tar vi et utsnitt og bruker Macaulay-notasjonen



$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - Q - F\{x - L/2\}^0 = 0$

$$Q = \frac{F}{2} + \frac{M_A}{L} - F\{x - L/2\}^0$$

$\sum M_{snitt} \Rightarrow M_A - R_A x + F\{x - L/2\} + M = 0$

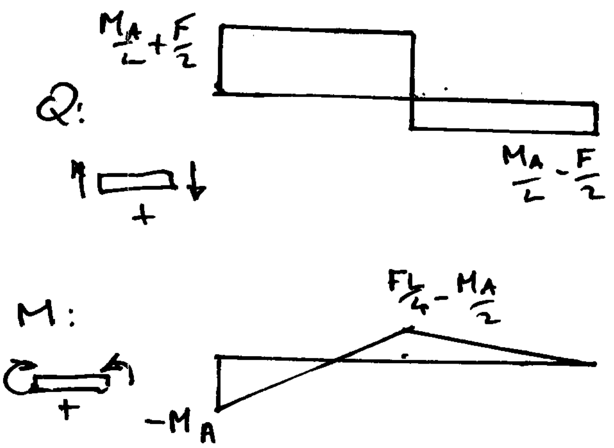
$$M = -M_A + R_A x - F\{x - L/2\}$$
$$= -M_A + \left(\frac{F}{2} + \frac{M_A}{L}\right)x - F\{x - L/2\}$$
$$= M_A\left(\frac{x}{L} - 1\right) + F\left(\frac{x}{2} - \{x - L/2\}\right)$$

Ved $x < L/2$ er $Q = \frac{F}{2} + \frac{M_A}{L}$, ved $x > L/2$ er $Q = \frac{M_A}{L} - \frac{F}{2}$

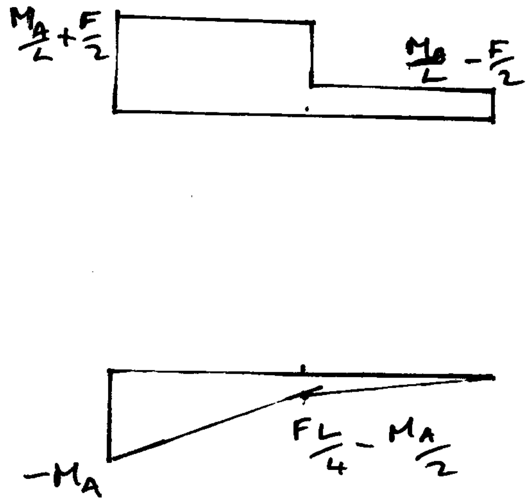
Ved $x = L/2$ er $M = \frac{FL}{4} - \frac{M_A}{2}$

Formen til Q- og M-diagrammene er avhengig av om $\frac{F}{2} < \frac{M_A}{L}$ eller $\frac{F}{2} > \frac{M_A}{L}$. Vi viser begge varianter:

Med $\frac{F}{2} < \frac{M_A}{L}$:



Med $\frac{F}{2} > \frac{M_A}{L}$:



(c)

$$M = -EI\,v''$$

$$-EI\,v'' = M_A\left(\frac{x}{L} - 1\right) + F\left(\frac{x}{2} - \{x - L/2\}\right)$$

Integreres 2 ganger:

$$-EI\,v' = M_A\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{L} - x\right) + F\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\{x - L/2\}^2\right) + C_1$$

$$-EI\,v = M_A\left(\frac{1}{6}\frac{x^3}{L} - \frac{1}{2}x^2\right) + F\left(\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{6}\{x - L/2\}^3 + C_1 x + C_2\right.$$

Randbetingelser:

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_2$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow 0 = M_A\left(-\frac{1}{3}L^2\right) + F\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\right)L^3 + C_1 L$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{3}M_A L - \frac{1}{16}FL^2$$

Dermed blir

$$v = \frac{1}{EI}\left[F\left(\frac{1}{16}L^2 x - \frac{1}{6}\{x - L/2\}^3 - \frac{1}{12}x^3 + M_A\left(\frac{1}{6}\frac{x^3}{L} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}Lx\right)\right]\right.$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{F}{48}\left(3L^2 x - 4x^3 + 8\{x - L/2\}^3\right) - \frac{M_A}{6L}\left(x^3 - 3x^2 L - 2xL^2\right)\right]$$

(d) $M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M = F\left(\frac{x}{2} - \left\{x - \frac{L}{2}\right\}\right)$

σ_x har maks.verdi når $|M|$ har makverdi. Det er klart dette skjer ved $x = L/2$.

$$M_{maks} = FL/4$$

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$\sigma_{maks} = M_{maks} \frac{y_{maks}}{I}$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3, \quad y_{maks} = \frac{h}{2}, \quad M_{maks} = FL/4$$

$$\sigma_{maks} = \frac{FL}{4} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{12}{bh^3} = \underline{\underline{\frac{3}{2} \frac{FL}{bh^2}}}$$

(e) Nå bruker vi resultatene fra del (c) og setter $v'(0) = 0$:

$$0 = M_A \cdot 0 + F\{0\} + C_1$$

dvs. $\quad C_1 = 0$

Men $\quad C_1 = \frac{1}{3} M_A L - \frac{1}{16} FL^2$ fra før, så

$$\frac{1}{3} M_A L = \frac{1}{16} FL^2$$

$$\underline{\underline{M_A = \frac{3}{16} FL}}$$

Da får vi også

$$R_A = \frac{F}{2} + \frac{M_A}{L} = F\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\right) = \underline{\underline{\frac{11}{16} F}}$$

og $\quad \underline{\underline{R_C = \frac{5}{16} F}}$

Oppgave 2

(a) Figur 3(a) har 12 staver med ukjente aksialkrefter, samt 3 ukjente reaksjonskrefter, dvs. 15 ukjente.

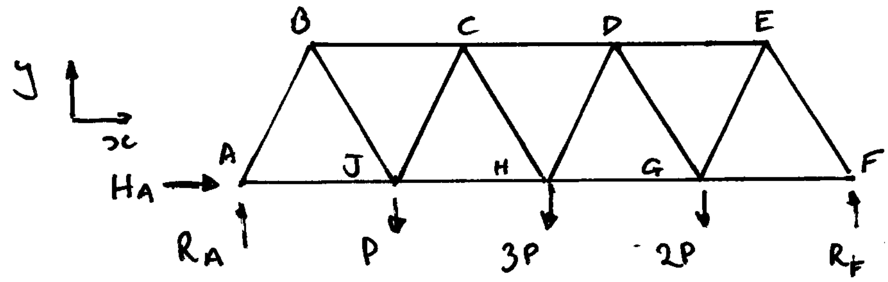
Det er 8 knutepunkter ⇒ 16 uavhengige likevektsligninger.

Dette fagverket er <u>statisk underbestemt</u> (mekanisme).

Det kreves en ekstra stav diagonalt i midten for å gjøre dette fagverket statisk bestemt.

Figur 3(b) er som 3(a), men med 14 staver med ukjente aksialkrefter. Nå har vi 17 ukjente og kun 16 uavhengige likevektsligninger ⇒ <u>statisk ubestemt</u>.

(b)



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

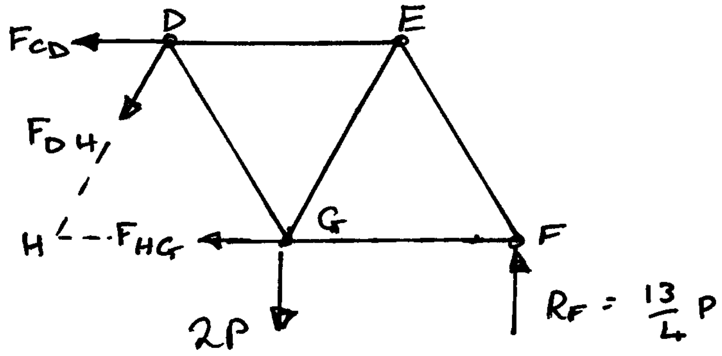
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_F = P + 3P + 2P = 6P$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a\,R_F = a.P + 2a.3P + 3a.2P$$

$$R_F = \frac{13}{4} P$$

$$R_A = 6P - R_F = \frac{11}{4} P$$

Vi tar et snitt gjennom CD, DH og HG og tegner et fritt legemediagram for den delen av fagverket til høyre for snittet:



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DH}\cos 30^\circ + 2P - R_F = 0$$

$$F_{DH} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{13}{4}P - 2P\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{5}{4}P$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{3}}P = \underline{\underline{1.443\ P}}$$

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow F_{CD}\, a\cos 30^\circ - 2Pa + R_F\, 2a = 0$$

$$F_{CD} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(2P - \frac{13}{4}P \cdot 2\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{2}P$$

$$= -3\sqrt{3}P = \underline{\underline{-5.196\ P}}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -F_{HG}\, a\cos 30^\circ - 2P \cdot a/2 + R_F \cdot \frac{3a}{2} = 0$$

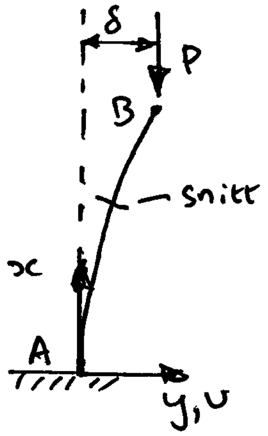
$$F_{HG} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{13}{4}P - P\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{31}{8}P$$

$$= \frac{31}{4\sqrt{3}}P = \underline{\underline{4.474\ P}}$$

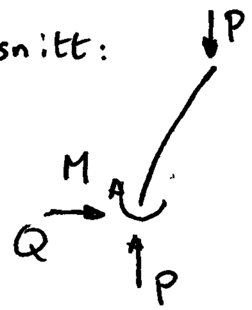
Oppgave 3

Vi kan sette opp aksekorset med origo i punkt A eller B (som beveger seg med søylen). Her viser vi løsningen med origo i punkt A.

(a) Deformert søyle:



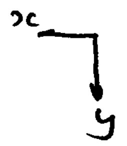
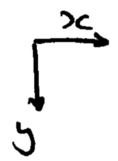
Utsnitt:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = 0$$

$$\Sigma M_{snitt} = 0$$

$$\Rightarrow M + P(\delta - v) = 0$$

(NB: Aksekorset tegnes ofte slikt:  eller )

Fra ligningen for bøyning på formelarket får vi

$$-EIv'' = M$$
$$= -P(\delta - v)$$

$$v'' + \frac{P}{EI} v = \frac{P\delta}{EI}$$

Vi setter $k^2 = P/EI$

Da blir løsningen $v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta$

Randbetingelser:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \delta = 0 \Rightarrow C_2 = -\delta$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 k \cos(0) - C_2 k \sin(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$v(L) = \delta \Rightarrow C_1 \sin(kL) + C_2 \cos(kL) + \delta = \delta$$

$$\Rightarrow C_2 \cos(kL) = 0$$

Dette betyr at enten er $C_2 = 0$ eller $\cos(kL) = 0$

$C_2 = 0$ betyr ingen deformasjon, uansett verdien av lasten P.

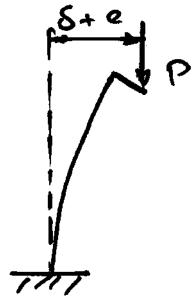
$\cos(kL) = 0$ betyr at $kL = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ mens C_2 er ubestemt. I dette tilfellet er

$$P = k^2 EI = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

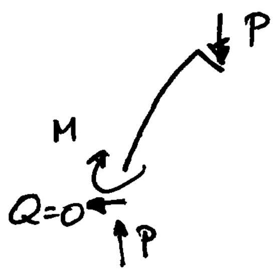
Den laveste verdien gir kritisk last

$$\underline{\underline{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}}}$$

(b) Med eksentrisk last har vi følgende:



Utsnitt:



$\sum M = 0$ gir nå

$$M + P(e + \delta - v) = 0$$

$$-EIv'' = M = -P(e + \delta - v)$$

$$v'' + \frac{P}{EI} v = \frac{P}{EI}(\delta + e)$$

Løsningen blir nå $v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta + e$

med $k^2 = P/EI$

Randbetingelsene gir nå

$v(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 + \delta + e = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = -(\delta + e)$

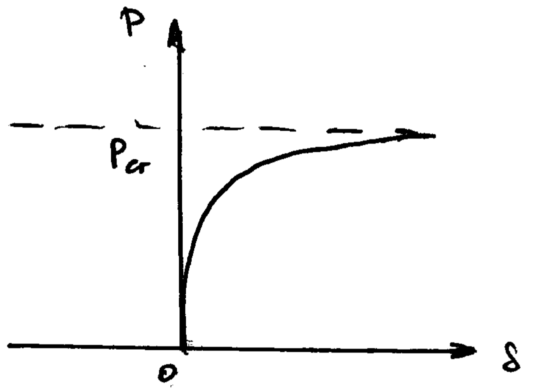
$v'(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 k - C_2 k \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$ som før.

$v(L) = \delta \;\Rightarrow\; \cancel{C_1 \sin(kL)} + C_2 \cos(kL) + \cancel{\delta} + e = \cancel{\delta}$

$$C_2 \cos(kL) = -e$$

$$\text{dvs} \quad (\delta + e)\cos(kL) = e$$

$$\delta = e\,[\sec(kL) - 1]$$

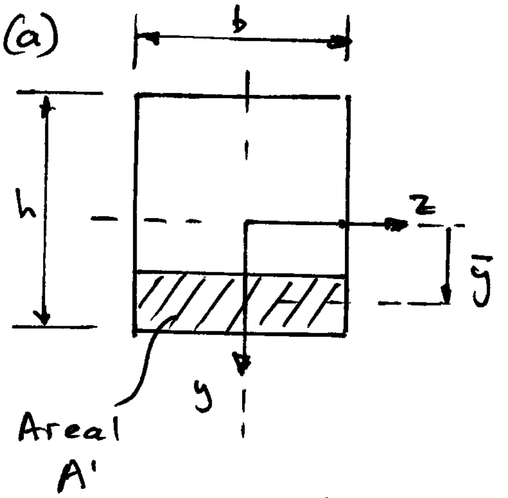


$\delta \to \infty$ når $P \to P_{cr}$ $(kL \to \pi/2)$

Detaljert løsning kreves ikke, men kandidaten må vise at han/hun forstår hva som skjer.

Oppgave 4

(a)



$$I = \frac{1}{12} b h^3$$

For å beregne τ ved avstand y fra bjelkeaksen trenger vi A' og $\bar{y}$.

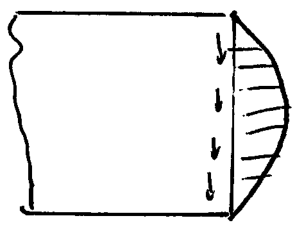
$$A' = b\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\left(y + \frac{h}{2}\right)$$

Fra formelarket finner vi:

$$\tau = Q \frac{A'\bar{y}}{Ib} = Q \frac{b\left(\frac{h}{2}-y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(y+\frac{h}{2}\right)}{\frac{1}{12} b h^3 \cdot b}$$

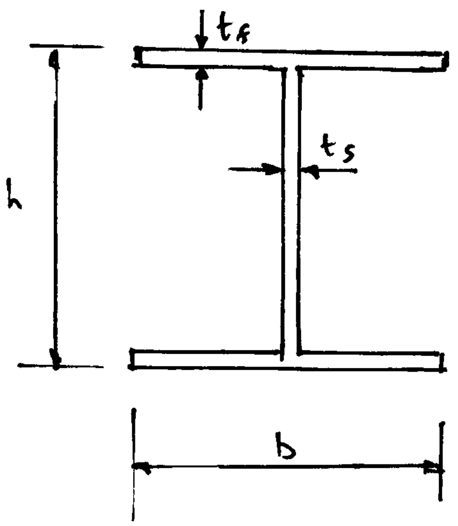
$$= \frac{6Q\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]}{b h^3} = \frac{6Q}{bh}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$



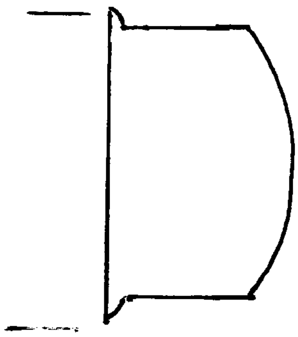
Maks verdi av τ oppstår ved $y=0$

$$\tau_{maks} = \frac{3Q}{2bh}$$

(b) For en I-bjelke har vi følgende:

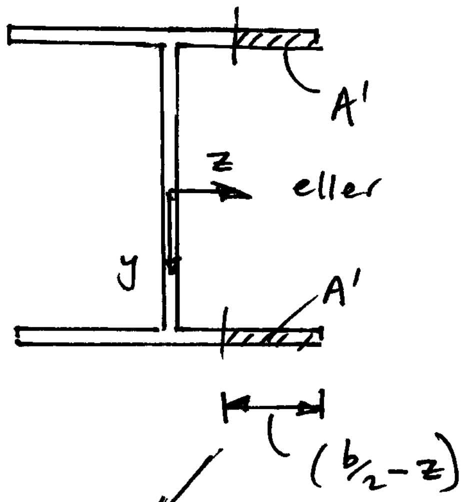


Vertikal skjærspenning τ_{xy} ser nå slik ut:



τ_{xy} i flensene er nå liten sammenlignet med den i steget, fordi $t_s << b$

I flensene er det τ_{xz} som er størst. Verdien av τ_{xz} i flensene kan finnes ved å se på areal A' som vist her:



For denne har vi

$$A' = t_f \left(\frac{b}{2} - z\right)$$

og $\bar{y} \simeq h/2$

så $$\tau_{xz} \simeq \frac{Q\, t_f \left(\frac{b}{2} - z\right) h/2}{I b}$$ – lineær variasjon med z

De viktigste skjærspenningene ser slik ut: