

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MEK 3100–4100 — Matematiske metoder i mekanikk.
Eksamensdag: Fredag 4. juni 2004.
Tid for eksamen: 09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.
Vedlegg: Ingen.
Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

En elastisk streng har lengde ℓ og er fastspent i endepunktene. Tettheten (masse per lengde) er ρ og strekk-kraften i strengen σ . Dersom η betegner et lite utslag fra likevekt vil kinetisk og potensiell energi, per lengde, være gitt ved

$$T = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2, \quad V = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2,$$

der x måler lengden langs strengen. Hamiltons prinsipp kan nå skrives

$$\delta \int_0^{t_1} \int_0^\ell (T - V) dx dt = 0 \tag{1}$$

Finn Euler-Lagrangeslikningene. En skal ikke sette inn i generell formel, men starte fra (1) og gå igjennom stegene i utledningen for dette spesielle tilfellet.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Vi har gitt likningsettet

$$\epsilon \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 1, \quad (2)$$

der p og q er analytiske funksjoner (har Taylorekker) og er positive i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Vi antar at parameteren ϵ er liten.

- Finn en løsning av (2) ved grensesjiktsteori for $\epsilon \rightarrow 0$.
- Vi bryter nå med forutsetningene ovenfor og antar at $q < 0$ i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Forklar hvorfor grensesjiktsteori ikke kan brukes i dette tilfellet.

Oppgave 3.

Vi fortsetter med likningssettet fra oppgave 2b). Definerer vi $q \equiv -r^2$ og endrer randbetingelsene får vi problemet

$$\epsilon \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} \right) + r^2(x)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy(0)}{dx} = 0, \quad (3)$$

der p og r er positive i intervallet $0 \leq x \leq 1$.

- Reskaler (3) slik at vi får likningen

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \mu p(\mu z) \frac{dy}{dz} + r^2(\mu z)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy(0)}{dz} = 0, \quad (4)$$

der μ er en liten parameter.

- Nå setter vi $r = r_0 = \text{konstant}$. Finn den ledende orden av løsningen til (4) ved en flerskalautvikling.
- Vi går tilbake til tilfellet med variabel r . Hvorfor bryter en direkte flerskalautvikling sammen? Finn løsningen til ledende orden med en modifisert utvikling.

(Fortsettes side 3.)

Formeltillegg

Her er noen formler som *kan* komme til nytte.

Trigonometriske identiteter

$$\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta \quad (5)$$

$$\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta \quad (6)$$

$$\cos^2 \theta \sin \theta = \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta \quad (7)$$

$$\cos \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta \quad (8)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (9)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \theta^{(2j+1)} \quad (10)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \theta^{2j} \quad (11)$$

Partikulærløsninger

Likning:

$$yt + \omega^2 y = F(t) \quad (12)$$

der ω er en konstant. Utvalgte partikulærløsninger:

$F(t)$	Part. løsning
$\cos \sigma t, \sigma \neq \pm \omega$	$(\omega^2 - \sigma^2)^{-1} \cos \sigma t$
$\sin \sigma t, \sigma \neq \pm \omega$	$(\omega^2 - \sigma^2)^{-1} \sin \sigma t$
$\cos \omega t$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$
$\sin \omega t$	$-\frac{1}{2\omega} t \cos \omega t$

SLUTT