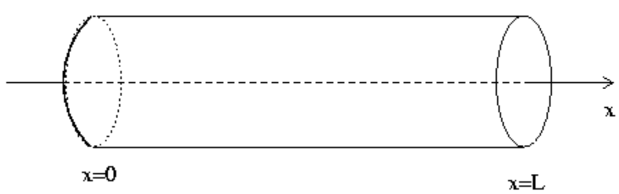
UNIVERSITETET I OSLO

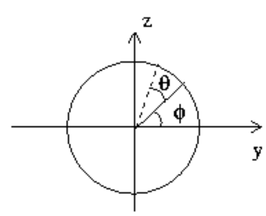
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 2200–4200 — Viskøse væsker og elastiske stoffer.
Eksamensdag:	Mandag 6. desember 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.





En sylindrisk stav med lengde L og radius a er orientert langs x-aksen. Den ene enden $x = 0$ holdes fast. Den andre enden $x = L$ kan vris en vilkårlig liten vinkel θ rundt x-aksen. Vi antar at forskyvningsfeltet kan skrives

$$\boldsymbol{u} = r\theta(x,t)\boldsymbol{e}_\phi$$

hvor $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $\theta(x,t)$ er dreievinkelen som kan variere langs staven og i tid, og $\boldsymbol{e}_\phi$ er enhetstangent vektor til sirkelen $r =$ konstant.

Staven er laget av et isotropt elastisk materiale med tetthet ρ og Lamés elastisitetsparametre λ og μ. Det er ingen volumkrefter. Sideflaten $r = a$ er fri.

(Fortsettes side 2.)

a) Beregn tøyningstensoren og spenningstensoren.

b) Vis at det antatte forskyvningsfeltet tilfredsstiller alle krav som må være oppfylt.

c) Vis at dreievinkelen θ tilfredsstiller likninga

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

Bestem hastigheten c.

d) Dersom enden ved $x = L$ holdes fast med dreievinkel θ_0, bestem en likevektsløsning for forskyvningsfeltet.

e) Nå lar vi dreievinkelen ved $x = L$ være $\theta = \theta_0 \cos\omega t$. Det er naturlig å anta en løsning

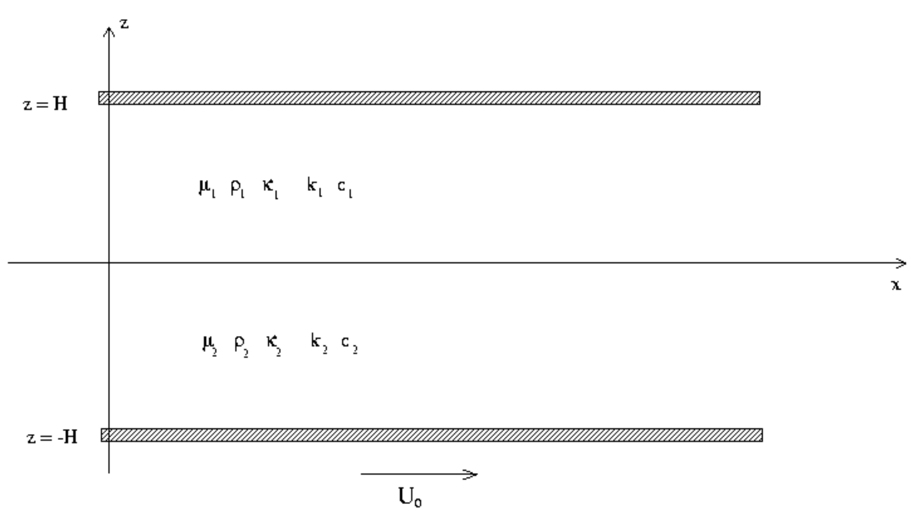
$$\theta(x,t) = \hat{\theta}(x)\cos\omega t$$

Bestem $\hat{\theta}(x)$.
Hva skjer med denne løsningen for

$$\frac{\omega L}{c} = n\pi \qquad \text{når} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Kommenter svaret.

Oppgave 2.



To ikke-blandbare inkompressible væsker befinner seg mellom to plater ved $z = -H$ og $z = H$. Væskene har viskositet μ_i, tetthet ρ_i, varmediffusivitet κ_i, termisk konduktivitet k_i og spesifikk varmekapasitet c_i for henholdsvis $i = 1, 2$. Husk at $k = \kappa\rho c$. Væske 1 er over $z = 0$ og væske 2 er under

(Fortsettes side 3.)

$z = 0$. Tyngdekrafta virker i negativ z-retning. Bunnplata beveger seg med konstant hastighet U_0 i x-retning. Topp-plata står i ro. Vi betrakter kun bevegelse i xz-planet, med hastighetsvektor

$$\boldsymbol{v} = (v, w)$$

a) Vi antar at hastighetsfeltet er uniformt i x-retning. Begrunn hvorfor den vertikale hastighetskomponenten w er lik null.

b) Vi antar det ikke pålegges eksterne trykkgradienter. Bestem den stasjonære hastighetsprofilen.

c) Bestem kraft pr. flateenhet og arbeid pr. tids- og flateenhet for å trekke bunnplata.

d) Beregn energidissipasjonen i de to væskene. Vis at den totale dissipasjonen er lik arbeidet utført for å trekke bunnplata.

e) Begge platene holdes på konstant temperatur T_0. Bestem temperaturfordelingen i væskene. Klarer du å vise at varmetrasnporten går fra væska med minst $k_i\mu_i$ til væska med størst $k_i\mu_i$?

SLUTT