UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 3220/4220 — Viskøse væsker og elastiske medier.
Eksamensdag:	Tirsdag 1. desember 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100.

Oppgave 1

Betrakt et isotropt lineært elastisk medium med Lamés parametere λ og μ. La x_j og $\boldsymbol{i}_j$ være henholdsvis kartesiske koordinater og koordinat enhetsvektorer for $j = 1, 2, 3$. La forskyvningsvektoren være $\boldsymbol{u} = u_j \boldsymbol{i}_j$. La vektoren $\boldsymbol{v} = v_j \boldsymbol{i}_j$ være en prinsipalretning for deformasjonstensoren ϵ_{ij} med tilhørende prinsipaldeformasjon α.

Vis at $\boldsymbol{v}$ er en prinsipalretning for spenningstensoren P_{ij} og finn den tilhørende prinsipalspenningen.

Oppgave 2

En sylindrisk stav har uforstyrret lengde L og radius R. x-aksen er orientert langs senterlinja til staven. Staven holdes fast i den ene enden ($x = 0$), mens ved den andre enden ($x \approx L$) pålegges ei stasjonær kraft F i x-retningen. På siden ($r = \sqrt{y^2 + z^2} \approx R$) er staven fri. De to tilnærmet likhetstegnene "$\approx$" minner oss om at lengden og radiusen vil endre seg litt på grunn av den pålagte krafta. Staven er lineært elastisk med Lamés parametere λ og μ. Vi ser bort fra volumkrefter.

a) Uttrykk spenningstensoren sin komponent P_{xx} ved krafta F.

b) Finn grenseflatebetingelsene på begge endeflatene og på sideflaten uttrykt ved forskyvningsvektoren $\boldsymbol{u}$ og Lamés parametere.

I det følgende antar vi at forskyvningsfeltet er gitt ved

$$\boldsymbol{u} = \alpha x \boldsymbol{i} - \beta y \boldsymbol{j} - \beta z \boldsymbol{k}$$

(Fortsettes på side 2.)

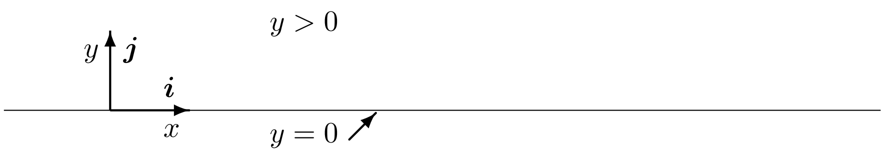
hvor $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x, y og z-retningene.

c) Regn ut deformasjonstensoren ϵ_{ij}. Utled Poissons forhold $\nu = \beta/\alpha$ og Youngs modul $E = P_{xx}/\epsilon_{xx}$, og uttrykk begge ved Lamés parametere.

d) Regn ut spenningstensoren. Finn maksimal skjærspenning og flaten som den maksimale skjærspenningen oppnås på.

Oppgave 3

Rommet $y > 0$ (se figur 1) er fylt med et homogent og isotropt Newtonsk fluid med konstant tetthet ρ og konstant kinematisk viskositet ν.



Figur 1 viser skjematisk rommet $y > 0$ omtalt i teksten. Det kartesiske (x, y)-koordinatsystemet referert til i teksten er også vist i figuren.

Planet $y = 0$ har hastigheten $U_0 \sin(\omega t)\boldsymbol{i}$ hvor U_0 er konstant, ω er en konstant angulær oscillasjonsfrekvens, t er tiden og $\boldsymbol{i}$ er enhetsvektoren i x-retningen. Det er ingen annen bevegelse i fluidet enn den som induseres av bevegelsen til planet $y = 0$. Det er heller ingen effekter av tyngden. Det antaes kjent at for trykket p gjelder

$$p(\boldsymbol{x}, t) \to p_\infty \qquad \text{når } y \to \infty \tag{1}$$

og for hastigheten

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \to \boldsymbol{0} \qquad \text{når } y \to \infty \tag{2}$$

hvor $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.

a) Finn trykkfeltet p i fluidet.

b) Forklar at hastighetsfeltet $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ som induseres i fluidet av bevegelsen til planet $y = 0$ kan skrives $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{i}\, u(y, t)$.

c) Forklar at hastighetsfeltet som induseres i fluidet er beskrevet ved likningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3}$$

Det er hensiktsmessig å regne med $u(y, t)$ som en kompleks størrelse når en skal finne den generelle løsningen av (3), for så etter at man har funnet den generelle komplekse løsningen, å tilskrive realdelen fysisk mening. I denne sammenheng kan en innføre $u(y, t) = h(y) \exp(\mathrm{i}\omega t)$, hvor $h(y)$ blir en kompleks funksjon ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$).

d) Finn $h(y)$ og hastigheten i fluidet.

e) Finn veggskjærspenningen ved planet $y = 0$.

SLUTT