Oppg. 13 ***Det enkleste grensesjiktsproblemet ?.*** Vi har en uendelig lang plate som faller sammen med xy-planet (I Blasiusproblemet har vi en halvuendelig plate). Over denne er det en Newtonsk væske. For $t = 0$ er væsken i ro, men deretter settes platen i bevegelse med konstant hastighet $U\mathbf{i}$ i x-retning. Over tid vil det da vokse opp et viskøst grensesjikt ved platen. I motsetning til Blasius-grensesjiktet har dette ingen variasjon i x-retning og strømmen er også parallell med x-aksen. Derimot er ikke strømmen stasjonær. Det er ingen trykkgradient langs platen.

a) Vi retter z-aksen normalt platen og antar $\mathbf{v} = u(z,t)\mathbf{i}$. Vis at u må oppfylle randverdiproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u(z,0) = 0, \quad u(0,t) = U. \tag{8}$$

Hvilken standardlikning er dette ?

b) Vi antar (håper) at u kan uttrykkes som en similaritetsløsning

$$u = UF(\eta), \quad \text{der} \quad \eta = \frac{z}{\delta(t)}.$$

Dette kan kalles en similaritetsløsning fordi vi har samme form på profiler langs for alle t, men profilene strekkes når t (og δ) øker. Vis at differensiallikningen i (8) nå gir

$$\frac{\delta\delta'}{\nu}\eta F' + F'' = 0,$$

og forklar at en løsning er mulig dersom

$$\delta(t) = C\sqrt{\nu t},$$

der C er en konstant som, feks., kan velges lik 2 slik at

$$F''(\eta) + 2\eta F(\eta) = 0. \tag{9}$$

Forklar at randbetingelser for F blir

$$F(0) = 1, \quad F(\infty) = 0.$$

c) Vis at når du løser differensiallikningen (9) og bruker den ene randbetingelsen får du

$$F = 1 + A\int_0^\eta e^{-s^2}\,ds,$$

der A er en konstant som ennå ikke er bestemt. Du bør ikke prøve å løse ut dette integralet i formel.

d) Bruk (uten bevis!) at

$$\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

slik at du kan skrive løsningen som

$$F = 1 - \mathrm{erf}\,(\eta) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{z}{\delta(t)}\right), \tag{10}$$

der erf er *feilfunksjonen* definert ved

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-t^2}\, dt.$$

e) Matlab har ferdige rutiner for å beregne $\operatorname{erf}(x)$ (skriv **doc erf**). Bruk Matlabs, eller et annet egnet verktøys, rutine for $\operatorname{erf}(x)$ til å plotte F som funksjon av η.

f) Vi skal nå sammenlikne grensesjiktet i denne oppgaven med Blasius-grensesjiktet. Vi har vist at grensesjiktstykkelsen vokser med tiden som $\delta(t) = C\sqrt{\nu t}$. For Blasiusprofilet kan vi tenke oss at denne tiden svarer til tiden den ytre strømmen har følt plata, dvs. tiden en partikkel i den ytre strømmen bruker fra forkant av plata til x. Bruk dette og uttrykket for δ ovenfor til å anslå hvordan tykkelsen for Blasius-grensesjiktet varier med x. Er resultatet korrekt ?

Oppg. 14 *Regnskap for bevegelsesmengde.* Vi skal se på momentumlikningen for et endelig volum og knytte denne til bevegelseslikningen.

Først en knapp innledning. For et system av partikler er bevegelsesmengden

$$\mathbf{I} = \sum m\mathbf{v}.$$

Massemiddelpunktsatsen kan da uttrykkes som

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F},$$

der $\mathbf{F}$ er summen av ytre krefter. Dersom de ytre kreftene er null i sum sier denne likningen at bevegelsesmengden er bevart.

For et endelig volum, τ, med overflate σ kan vi tilsvarende sette opp en bevaringssats for bevegelsesmengde

Tidsendring av bevegelsesmengde i τ
= spenningskraft på σ + resultant av volumkrefter på τ
- (utstrømsrate av bevegelsesmengde gjennom σ)

Satsen kan brukes på vektorform, eller for hver av komponentene. Vi holder oss til vektorformen i denne oppgaven, mens komponentformenbrukes for grensesjikt i en senere oppgave.

a) Forklar hvorfor utstrømsrate av bevegelsesmengden gjennom et flatelement kan skrives

$$\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma.$$

Vi kan tolke $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$ som en momentumtransport-tensor skrevet på dyadeform. Forklar videre hvorfor tidsendringsraten av bevegelsesmengde i et volumelement er

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}\, d\tau$$

b) Sett opp integraler for alle bidrag til bevaringssatsen for bevegelsesmengde og vis at dette fører til

$$\int\limits_\tau \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} d\tau = \int\limits_\sigma \mathbf{n}\cdot\mathcal{P} d\sigma + \int\limits_\tau \rho\mathbf{g} d\tau - \int\limits_\sigma \rho\mathbf{v}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} d\sigma, \tag{11}$$

der $\mathcal{P}$ er spenningstensoren og $\vec{g}$ er ytre volumkrefter regnet per masse. Denne relasjonen kan være utgangspunkt for integrerte betrakninger av bevegelsesmengde i en væske, feks. for grensesjikt.

c) Vis at den integrerte likningen for bevegelsesmengde i forrige delpunkt medfører

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathcal{P} + \rho \mathbf{g}.$$

d) Utled bevegelseslikningen, på standard form, fra resultatet i det forrige delspørsmålet. Hint: du må bruke kontinuitetslikningen og kan ha fordel av å se på oppgave 4.

Oppg. 15 ***Integrerte likninger brukt på grensesjikt.*** I "Blasius"-problemet har vi en halvuendelig plate fra $x = 0$ til $x = \infty$ og en ytre potensialstrøm $U\mathbf{i}$. Vi definerer et kontrollområde i xz planet som begrenses av (i): en linje normalt x-aksen med $0 \le z \le H$ for $x = a < 0$ (oppstrøms for plata); (ii) av x-aksen fra $x = a$ til en fritt valgbar x-verdi; (iv) en øvre begrensning $Z(x) = H + \Delta(x)$ som er strømlinjen gjennom $x = a$ og $z = H$; (iii) en begrensning normalt x-aksen ved den valgte x som går fra $z = 0$ til $z = Z(x)$. Det er en forutsetning at $z = H$ er langt utenfor grensesjiktet. Tegn området.

a) Vi ser først på masseregnskapet. Siden ρ er konstant er dette ensbetydende med å se på et regnskap for volum. Forklar hvorfor det ikke er noen volumtransport gjennom (ii) og (iv) og hvorfor transporten inn ved (i) da er lik transporten ut ved (iii).

b) Vis at det forrige punkt fører til

$$0 = HU - \int_0^{Z(x)} u(x,z)dz. \tag{12}$$

Vis videre at dette fører til

$$\Delta(x) = \int_0^H \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz \approx \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz. \tag{13}$$

Δ kalles ofte *fortrengningstykkelsen*.

c) Så ser vi på x-komponenten av bevegelsesmengden. Vi tar da utgangspunkt i at venstresiden i (11) forsvinner (hvorfor?). Forklar hvorfor vi ikke får betydelige bidrag til spenningsleddet fra (i), (iii) eller (iv). Forklar videre hvorfor momentum ikke fraktes med strømmen gjennom (ii) og (iv).

d) Vis at (11) gir

$$0 = -\int_0^x \tau_0(\hat{x})d\hat{x} + \rho H U^2 - \int_0^{Z(x)} \rho (u(x,z))^2 dz, \tag{14}$$

der $\tau_0(x) = p_{xz}(x, 0)$ er skjærspenningen på platen.

e) Bruk (12) til å skrive om relasjonen fra forrige punkt til

$$\int_0^x \tau_0(\hat{x})d\hat{x} = \int_0^{Z(x)} \rho u\,(U - u)\,dz. \tag{15}$$

f) Forklar hvorfor skjærspenningen kan skrives som

$$\tau_0(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^b \rho u\,(U-u)\,dz \approx \int_0^b \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\,(U-u)\right] dz, \tag{16}$$

der b kan være, feks., Z, ∞ eller en korrekt definert grensesjiktstykkelse δ_u, slik at $u(x, \delta_u) \approx U$.

g) Anta at hastighetsprofilet er gitt som

$$u = \begin{cases} \frac{U}{\delta_u} z & \text{hvis} \quad z \le \delta_u, \\ U & \text{hvis} \quad z > \delta_u. \end{cases}$$

Bruk (16) til å finne $\delta_u(x)$ og sammenlikn med resultatet i kompendiet.

Oppg. 16 *Numerisk beregning av Blasiusprofilet.* For Blasiusprofilet kan hastigheten i x-retning skrives som

$$u = Uf'(\zeta), \quad \zeta = \frac{z}{\delta(x)},$$

der

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Funksjonen f oppfyller likningen

$$f''' + ff'' = 0, \tag{17}$$

med randbetingelser

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \lim_{\zeta\to\infty} f' = 1. \tag{18}$$

a) Skriv om (17) og (18) til et sett av førsteordenslikninger slik at du får

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' &=& y_2, \\ y_2' &=& y_3, \\ y_3' &=& -y_1 y_3, \end{array}\right\} \tag{19}$$

og randbetingelser

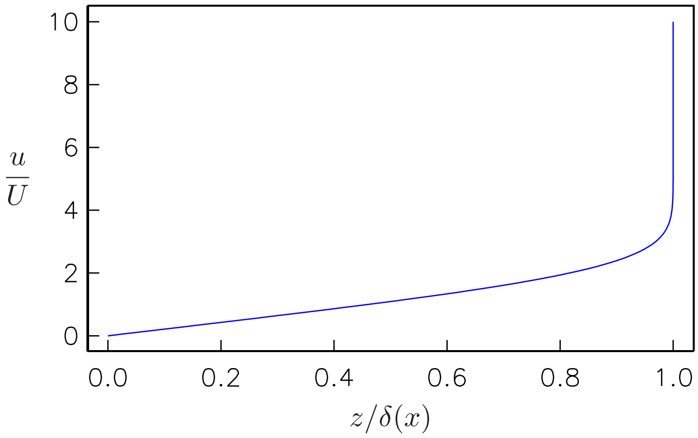
$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad \lim_{\zeta\to\infty} y_2 = 1. \tag{20}$$

Problemet her er at vi har to betingelser ved $\zeta = 0$ og en ved $\zeta = \infty$.

b) En enkel løsningsteknikk for et ikkelineært randverdiproblem som (19) og (20) er *skytemetoden* som bygger på løsning av initialverdiproblemer. Hadde vi hatt en betingelse på $y_3(0)$, i stedet for en på y_2 i uendelig, ville en kunne integrert steg for steg fram i ζ vha. feks. Runge-Kuttas metode. I skytemetoden forsøker en å tilpasse en startverdi, $y_3(0) = a$, slik at vi "treffer" betingelsen ved den andre randa ved å integrere framover ved Runge-Kuttas metode. Betingelsen i $\zeta = \infty$ tilnærmer vi med $y_2(\zeta_\infty) = 1$, der ζ_∞ er stor nok – i dette problemet er $\zeta_\infty = 10$ greit, mens en generelt må prøve seg fram, eller bruke en asymptotisk analyse (dvs. tilnærmelse for store ζ).

I vårt tilfelle kan du følge prosedyren

1. Kod en løsningsteknikk for likningssettet i Matlab, eller et annet system du heller bruker, slik at a enkelt kan varieres og at $y_2(\zeta_\infty)$ skrives ut.
2. Velg et par verdier for a feks. 1 og 2 og beregn $y_2(\zeta_\infty)$ for disse.
3. Anta at $y_2(\zeta_\infty)$ varierer monotont med a og juster inn a manuelt til du har $|y_2(\zeta_\infty) - 1| < 0.001$. Sjekk at oppløsning er fin nok og at ζ_∞ er stor nok.
4. Tegn ut hastighetsprofilet slik som i figur 1.



Figur 1: Profil beregnet vha. numerisk integrasjon

c) Fortrengningstykkelsen er gitt som

$$\Delta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dz.$$

Vis at denne blir

$$\Delta = \left\{ \lim_{\zeta \to \infty} (\zeta - F) \right\} \delta(x),$$

og beregn konstanten foran δ med den numeriske løsningen funnet ovenfor.