Oppg. 5 ***Maksimum normal og skjærspenning.*** I denne oppgaven analyserer vi spenningen i ett bestemt punkt i et kontinuum. Målet er å knytte ekstremale normal og skjærspenninger til prinsipalspenninger og prinsipalretninger.

a) Vi anser prinsipalretninger og spenninger som kjente og velger et koordinatsystem der aksene peker i prinsipalretningene. Forklar at spenningstensoren, $\mathcal{P}$, blir diagonal og at den kan skrives

$$\mathcal{P} = \sigma_i \mathbf{i}_i \mathbf{i}_i, \tag{3}$$

der σ_i er prinsipalspenningene og det er sum over i.

b) Vis at for en flate med enhetsnormal $\mathbf{n} = n_i \mathbf{i}_i$ blir størrelsen av normalspenningen

$$P_n = \sigma_i (n_i)^2, \tag{4}$$

der det er sum over i, mens tangensialspenningen blir

$$\mathbf{P}_T^2 = (\sigma_i)^2 (n_i)^2 - P_n^2, \tag{5}$$

der det igjen er sum over i.

c) Vis at maksimum normalspenning oppnås når $\mathbf{n}$ peker i den prinsipalretning som har størst prinsipalspenning. Maksimal normalspenning blir da $\max(|\sigma_i|)$.

d) Maksimum skjærspenning finnes ved å maksimere $\mathbf{P}_T$ over alle n_1, n_2, n_3 som oppfyller $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Vis at dersom vi innfører de to fri variablene $\gamma = n_x^2$ og $\kappa = n_y^2$ får vi skjærspenningen uttrykt ved et enkelt polynom

$$F(\gamma, \kappa) = |\mathbf{P}_T|^2 = \sigma_1^2 \gamma + \sigma_2^2 \kappa + \sigma_3^2 (1 - \gamma - \kappa) - P_n^2, \tag{6}$$

der

$$P_n = \sigma_1 \gamma + \sigma_2 \kappa + \sigma_3 (1 - \gamma - \kappa).$$

Forklar at vi må ha $0 \le \gamma \le 1$, $0 \le \kappa \le 1$ og $\gamma + \kappa \le 1$, som svarer til et trekantet område, Ω i γ, κ planet.

e) Vi antar nå at alle prinsipalspenningene er ulike. Vis at F ikke har noen ekstremalpunkter i det indre av Ω og at F derfor må ha maksimum når èn n_i er null.

f) Velg $n_3 = 0$ og finn den maksimale verdien F da kan ha.

g) Forklar at svaret fra forrige delpunkt innebærer at maksimal skjærspenning er

$$|\mathbf{P}_T|_{\max} = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j|, \tag{7}$$

og inntreffer når $\mathbf{n}$ ligger midt mellom prinsipalretningene i og j.

h) Anta at $\sigma_2 = \sigma_3$ og finn retninger for maksimum skjærspenning da.

Oppg. 6 . Forklar at spenningstensoren kan uttrykkes

$$\mathcal{P} = \mathbf{i}_i \mathbf{P}_i,$$

der $\mathbf{P}_i$ er spenningen på flaten med normalvektor $\mathbf{i}_i$. Vis

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial x_i}.$$