Energimetoder

- **Diskretisering av et kontinuerlig problem vedbruk av prinsippet om minimum potensiell energi**

Potensiell energi for et elastisk system:

$$\Pi = U + H$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

$$H = -\int_V \left(F_x u + F_y v + F_z w\right) dV - \int_{S_\sigma} \left(T_x u + T_y v + T_z w\right) dS =$$

$$-\int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F}\, dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{T}\, dS$$

Overflatekrefter (traksjoner) pr. flateenhet $\mathbf{T} = \left[T_x\ T_y\ T_z\right]^T$

Indre volum-krefter $\mathbf{F} = \left[F_x\ F_y\ F_z\right]^T$

Forskyvninger $\mathbf{u} = \left[u_x\ u_y\ u_z\right]^T$

V = legemets volum, S_σ = del av overflaten som er påført overflatekrefter.

For et lineært elastisk material: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ (Hookes lov)

Den potensielle energien har stasjonær verdi for likevekt:

$$\delta\Pi = \delta H + \delta U = 0$$

Forskyvningene ved likevekt må tilfredsstille differensialligningen og randbetingelsene.

Tilnærmet metode:

Vi betrakter en tilnærmet forskyvningsfunksjon som er en kombinasjon av et sett lineært uavhengige form-funksjoner som tilfredsstiller de kinematiske grensebetingelsene.

Vi søker den ”beste” tilnærmelsen som de valgte formfunksjonene kan fremstille.

Problemet med uendelig mange frihetsgrader reduseres til ett med et begrenset antall frihetsgrader.

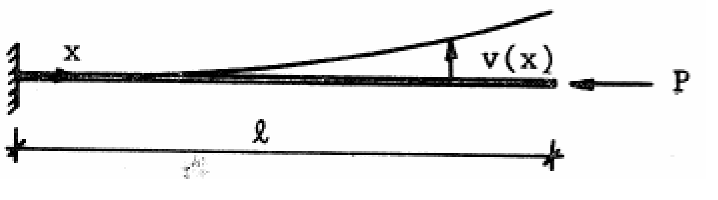
For en bjelke kan tverrforskyvningen $v(x)$ tilnærmet uttrykkes ved n formfunksjoner:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x) = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{c}$$

der $$\boldsymbol{\varphi} = [\phi_1 \; \phi_2 \; \phi_3 \ldots \phi_n]$$

og $$\mathbf{c} = [c_1 \; c_2 \; c_3 \ldots c_n]^T$$

Eksempel



Anta formen: $$v(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

Både ϕ_1 og ϕ_2 tilfredsstiller de kinematiske randbetingelsene

De tilfredsstiller *ikke* de naturlige randbetingelsene om null moment og skjærkraft ved $x = \ell$.

Rayleigh-Ritz' metode

Tøyningsenergien for en lineær-elastisk bjelke når aksialdeformasjonen neglisjeres:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^\ell M\kappa \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI(v'')^2 \, dx$$

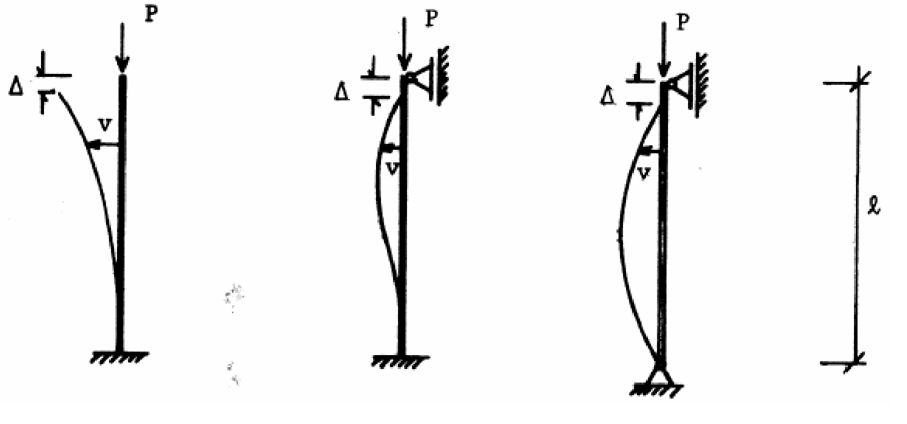
Tøyningsenergien svarende til forskyvningsantakelsen $v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$

$$U = \frac{1}{2}\int_\ell EI \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j\right)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c_i c_j \int_\ell EI\, \phi_i'' \phi_j'' dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \int_\ell EI(\boldsymbol{\varphi}'')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}'' dx \mathbf{c}$$

Lastpotensialet med aksialkraften P som eneste ytre last:

$$H = -P\Delta = -\frac{1}{2} P \int_0^\ell (v')^2 \, dx$$



Lastpotensialet svarende til forskyvningsantakelsen $v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$

$$H = -\frac{P}{2}\int_\ell \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i\right)\frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j\right)dx$$

$$= -\frac{P}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c_i c_j \int_\ell EI\, \phi_i' \phi_j' dx\right) = -\frac{P}{2}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}' dx \mathbf{c}$$

Den totale potensielle energien er da

$$\Pi = U + H = \frac{1}{2}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \int_\ell EI(\boldsymbol{\varphi}'')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}'' \, dx \, \mathbf{c} - \frac{P}{2}\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}' \, dx \, \mathbf{c} = \Pi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Betingelsen for likevekt er at Π har stansjonær verdi:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta H = \frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial c_2}\delta c_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial c_n}\delta c_n = 0$$

Dette skal være oppfylt for vilkårlige små variasjoner δc_1, δc_2, ..., δc_n. Da må alle de partialderiverte være lik null:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} &= \frac{\partial U}{\partial c_1} + \frac{\partial H}{\partial c_1} = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial c_2} &= \frac{\partial U}{\partial c_2} + \frac{\partial H}{\partial c_2} = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \Pi}{\partial c_n} &= \frac{\partial U}{\partial c_n} + \frac{\partial H}{\partial c_n} = 0
\end{aligned}$$

Dette gir n lineære ligninger med c_1, ..., c_n som ukjente.

Dette kan skrives: $$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{c}}\delta\mathbf{c} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{c}}\right)\delta\mathbf{c} = 0$$

Med vektornotasjon blir variasjonen

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = \delta U + \delta H &= \frac{1}{2}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell EI(\boldsymbol{\varphi}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}''dx\,\delta\mathbf{c} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell EI(\boldsymbol{\varphi}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}''dx\,\mathbf{c} \\
&\quad - \frac{P}{2}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'dx\,\delta\mathbf{c} - \frac{P}{2}\delta\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'dx\,\mathbf{c} \\
&= \delta\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell EI(\boldsymbol{\varphi}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}''dx\,\mathbf{c} - P\delta\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'dx\,\mathbf{c}
\end{aligned}$$

Vi har variert et produkt:

$$\delta(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

og brukt samme regel som for en enkel variabel:

$$\delta(xAx) = xA\delta x + \delta x A x = \delta(Ax^2)$$

Den transponerte av en skalar størrelse er lik seg selv slik at:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'dx\,\delta\mathbf{c} = \left(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'dx\,\delta\mathbf{c}\right)^{\mathrm{T}} = \delta\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'dx\,\mathbf{c}$$

Null variasjon skal være oppfylt for en vilkårlig variasjon $\delta\mathbf{c}$, slik at

$$\left(\mathbf{K} - P\mathbf{K}_{\mathbf{G}}\right)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

hvor

$$\mathbf{K} = \int_\ell EI(\boldsymbol{\varphi}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}''dx, \quad \mathbf{K}_{\mathbf{G}} = \int_\ell (\boldsymbol{\varphi}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}'dx$$

Vi får en ikke-triviell løsning (knekning) dersom

$$\left|\mathbf{K} - P\mathbf{K}_{\mathbf{G}}\right| = \mathbf{0}$$

K og $\mathbf{K}_\mathbf{G}$ kalles for generalisert *elastisk stivhetsmatrise* og generalisert *geometrisk stivhetsmatrise.*

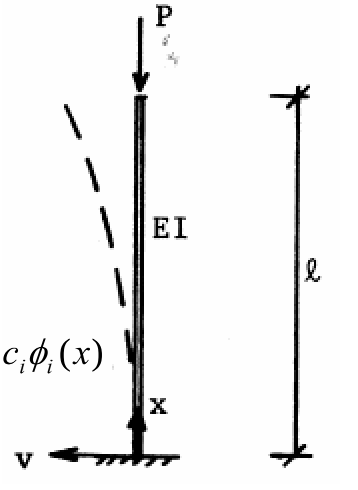
Generalisert fordi c_1, c_2, ... er generaliserte frihetsgrader (eller *generaliserte koordinater*).

De enkelte leddene er:

$$K_{ij} = \int_\ell EI\phi_i''\phi_j''dx, \quad K_{Gij} = \int_\ell \varphi_i'\varphi_j'dx$$

K tilsvarer elastisk tøyningsenergi og $\mathbf{K}_\mathbf{G}$ lastpotensial pga. søylens utbøyning (geometrisk effekt).

Eksempel: Knekning av utkragersøyle



$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$$

Vi antar at tverrforskyvningen har formen

$$v(x) = c_1\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{\ell}\right)\right) = c_1\phi_1(x)$$

Denne tilfredstiller de tvungne (dvs. kinematiske) randbetingelsene

$$v(0) = v'(0) = 0$$

Vi deriverer $\phi_1(x)$:

$$\phi_1'(x) = \frac{\pi}{2\ell}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{\ell}\right), \quad \phi_1''(x) = \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{\ell}\right)$$

Disse gir

$$K = K_{11} = \int_0^\ell EI\phi_1''\phi_1''dx = \frac{\pi^4 EI}{16\ell^4}\int_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{\ell}\right)dx = \frac{\pi^4 EI}{16\ell^4}\frac{\ell}{2} = \frac{\pi^4 EI}{32\ell^3}$$

$$K_G = K_{G11} = \int_0^\ell \varphi_1'\varphi_1'dx = \frac{\pi^2}{4\ell^2}\int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{\ell}\right)dx = \frac{\pi^2}{4\ell^2}\frac{\ell}{2} = \frac{\pi^2}{8\ell}$$

og fører til en skalar ligning:

$$(K - PK_G)c_1 = 0$$

En ikke-triviell løsning (dvs. kekning) finnes dersom

$$K - PK_G = 0$$

dvs.

$$P = \frac{K}{K_G} = \frac{\pi^2 EI}{32\ell^3}\frac{8\ell}{\pi^2} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$$

Denne løsningen er eksakt fordi den antatte formfunksjonen er identisk med den virkelige knekkformen.

Alternativ løsning med polynomfunksjon

$$v(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

Både ϕ_1 og ϕ_2 tilfredsstiller de kinematiske randbetingelsene

$$v(o) = v'(o) = 0$$

De tilfredsstiller ikke betingelsene om null moment og skjærkraft ved $x = \ell$.

Første fremstilling: Direkte bruk av energiutrykkene.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI(v'')^2\,dx = \frac{1}{2}EI\int_0^\ell (2c_1 + 6c_2 x)^2\,dx$$

$$= 2EI\int_0^\ell (c_1^2 + 6c_1c_2x + 9c_2^2x^2)dx = 2EI\left(c_1^2\ell + 3c_1c_2\ell^2 + 3c_2^2\ell^3\right)$$

$$H = -\frac{1}{2}P\int_0^\ell (v')^2\,dx = -\frac{1}{2}P\int_0^\ell (2c_1x + 3c_2x^2)^2\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}P\int_0^\ell (4c_1^2x^2 + 12c_1c_2x^3 + 9c_2^2x^4)dx = -\frac{1}{2}P\left(\frac{4}{3}c_1^2\ell^3 + 3c_1c_2\ell^4 + \frac{9}{5}c_2^2\ell^5\right)$$

slik at

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} = 0 = 2EI\left(2c_1\ell + 3c_2\ell^2\right) - \frac{1}{2}P\left(\frac{8}{3}c_1\ell^3 + 3c_2\ell^4\right)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_2} = 0 = 2EI\left(3c_1\ell^2 + 6c_2\ell^3\right) - \frac{1}{2}P\left(3c_1\ell^4 + \frac{18}{5}c_2\ell^5\right)$$

dvs. $c_1\left(\frac{4}{3}k - 4\right) + c_2\ell\left(\frac{3}{2}k - 6\right) = 0$

og $c_1\left(\frac{3}{2}k - 6\right) + c_2\ell\left(\frac{9}{5}k - 12\right) = 0$

hvor $k = \dfrac{P\ell^2}{EI}$

Disse har ikke-triviell løsning dersom

$$\left(\frac{4}{3}k-4\right)\left(\frac{9}{5}k-12\right)-\left(\frac{3}{2}k-6\right)^2=0$$

dvs.

$$3k^2-104k+240=0$$

Den minste roten er

$$k=\frac{P\ell^2}{EI}=2.486$$

slik at

$$P_{kr}=\frac{2.486EI}{\ell^2}$$

Den nøyaktige løsningen var

$$P_{kr}=\frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}=\frac{2.467EI}{\ell^2}$$

Annen fremstilling: Bruk av de generaliserte stivhetsmatrisene

$$v(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1' = 2x \;,\; \phi_1'' = 2 \\ \phi_2' = 3x^2 \;,\; \phi_2'' = 6x \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{\varphi}' = \begin{bmatrix} 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\varphi}'' = \begin{bmatrix} 2 & 6x \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{K} = EI\int_0^\ell \begin{bmatrix} 2 \\ 6x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6x \end{bmatrix} dx = EI\int_0^\ell \begin{bmatrix} 4 & 12x \\ 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dx = EI\ell \begin{bmatrix} 4 & 6\ell \\ 6\ell & 12\ell^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_G} = \int_0^\ell \begin{bmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x & 3x^2 \end{bmatrix} dx = \int_0^\ell \begin{bmatrix} 4x^2 & 6x^3 \\ 6x^3 & 9x^4 \end{bmatrix} dx = \frac{\ell^3}{30}\begin{bmatrix} 40 & 45\ell \\ 45\ell & 54\ell^2 \end{bmatrix}$$

Egenverdiproblemet er gitt ved

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 6\ell \\ 6\ell & 12\ell^2 \end{bmatrix} - \lambda_p \begin{bmatrix} 40 & 45\ell \\ 45\ell & 54\ell^2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hvor

$$\lambda_p = \frac{P\ell^2}{30EI}$$

Egenverdiene (kritiske laster) er gitt ved at determinanten av matrisen på venstre side er lik null, dvs.

$$(4 - 40\lambda_p)(12 - 54\lambda_p) - (6 - 45\lambda_p)^2 = 0$$

eller

$$135\lambda_p^2 - 156\lambda_p + 12 = 0$$

Den minste roten er $\lambda_p = 0.0829$

slik at

$$P_{kr} = 30\lambda_p \frac{EI}{\ell^2} = 2.486\frac{EI}{\ell^2}$$

Den tilhørende egenvektoren er

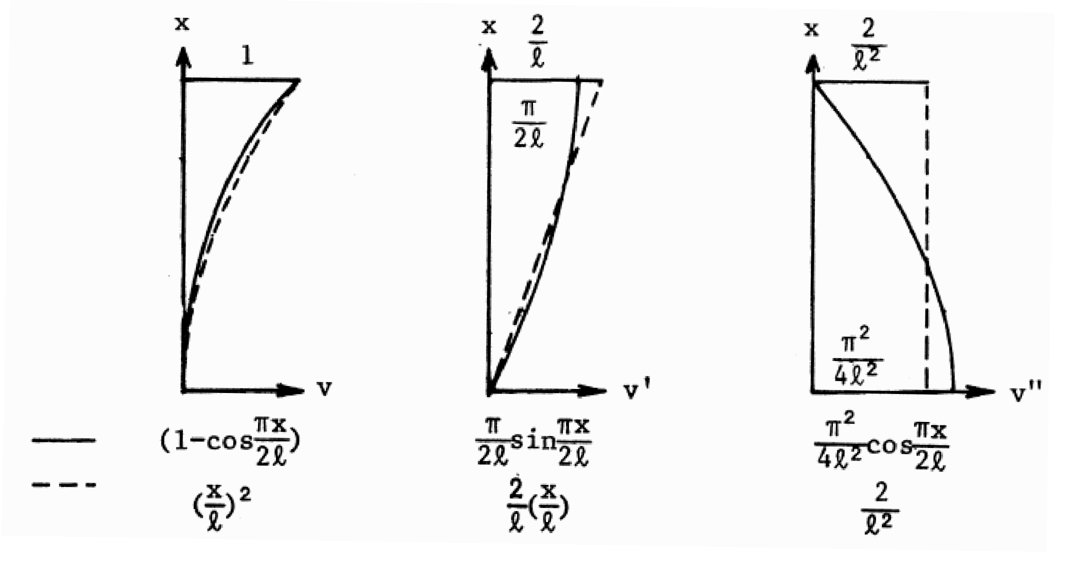
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3.32\ell \\ 1 \end{bmatrix}$$

slik at den tilnærmede knekkformen blir

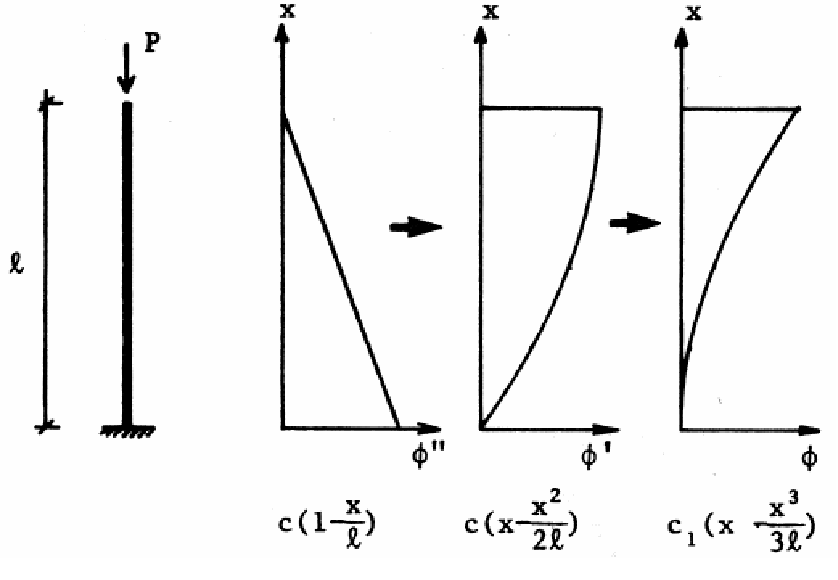
$$v(x) = c\left(-3.32x^2\ell + x^3\right)$$

Rayleigh-Ritz' metode overvurderer alltid knekklasten (eller gir korrekt verdi) pga. kinematiske restriksjoner som kommer fra valg av formfunksjonen.

De deriverte som avledes av en tilnærmet funksjon har generelt dårligere nøyaktighet enn funksjonen selv.



Det kan være best å anslå formen på krumningen, dvs. ϕ'' og integrere 2 ganger.



Krumningen antas å variere lineært. Integrasjonskonstantene tilpasses de tvungne randbetingelsene slik at

$$\phi(x) = c_1\left(x^2 - \frac{x^3}{3\ell}\right);\; c_1 = \frac{c}{2}$$

❑ Numerisk integrasjon

Vi erstatter et integral med en endelig sum:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i)$$

I en n-punkts integrasjonsregel beregnes $f(x_i)$ ved n diskrete punkter. Hver av disse verdiene multipliseres med et vekttall W_i før summering.

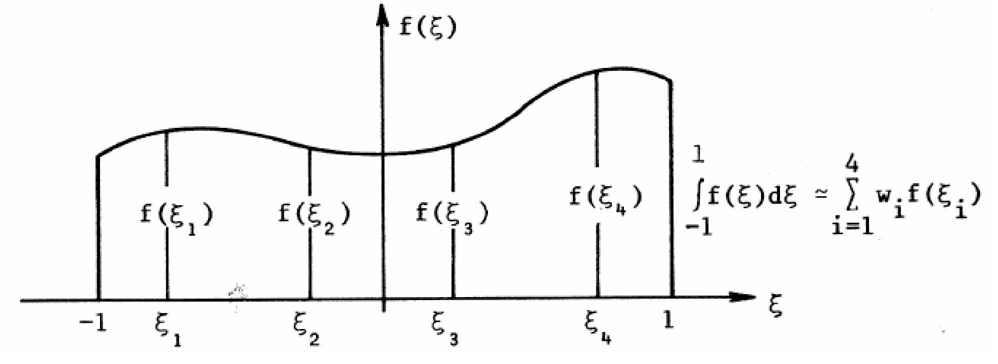
Dimensjonsløs formulering: Vi innfører variabel ξ slik at

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}$$

og ξ varierer fra -1 til +1 i integrasjonsområdet.

Da blir integrasjonsformelen

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i f(\xi_i)$$



Numerisk integrasjon med 4 punkter

Gauss-Legendre integrasjon

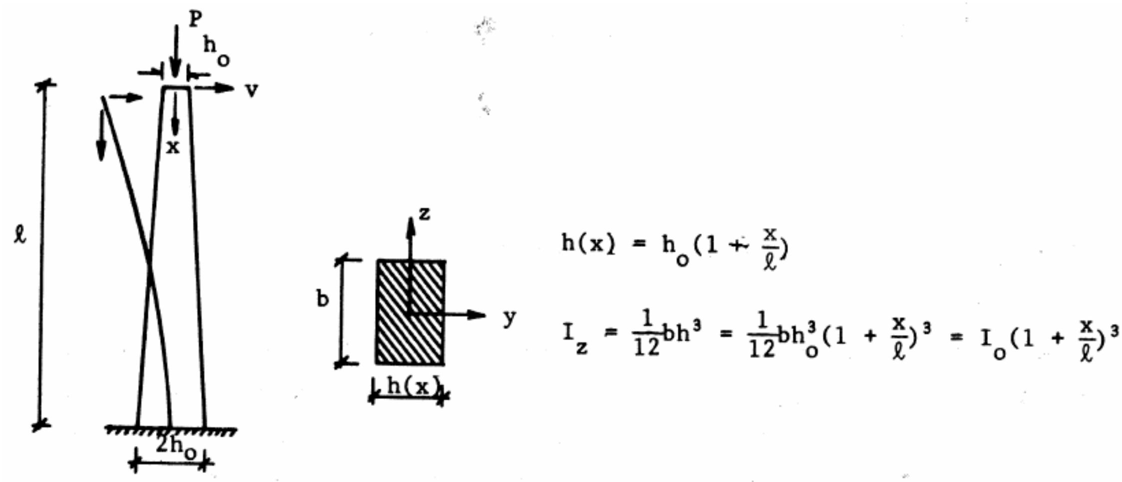
I n-punkts integrasjon har vi $2n$ parametre ($\xi_i \ldots \xi_n$ og $W_i \ldots W_n$) som kan bestemmes slik at et polynom av grad $2n$-1 integreres eksakt (siden den har $2n$ konstanter).

Tabell fra Bergan og Syvertsen Tillegg 2:

n	abscisser $\pm\xi_i$	vekttall W_i
2	0.57735 02692	1.0
3	0.0	0.88888 88889
	0.77459 66692	0.55555 55556
4	0.33998 10436	0.65214 51549
	0.86113 63116	0.34785 48451
5	0.0	0.56888 88889
	0.53846 93101	0.47862 86705
	0.90617 98459	0.23692 68851
6	0.23861 91861	0.46791 39346
	0.66120 93865	0.36076 15731
	0.93246 95142	0.17132 44924

Andre integrasjonsmetoder inkluderer Labotto- og Simpson-integrasjon.

<u>Eksempel</u>: Søyle med variabel stivhet



Bergan og Syvertsen løser dette ved bruk av metoden med komplementær energi. Denne gir en nedre grense på

$$P_{kr} = 11.0\frac{EI_0}{\ell^2}$$

Vi finner en øvre grense ved bruk av Rayleigh-Ritz' metode.

Vi antar

$$v(x) = c_1 \sin\frac{\pi x}{2\ell} = c_1\phi_1$$

$$\phi_1' = \frac{\pi}{2\ell}\cos\frac{\pi x}{2\ell}$$

$$\phi_1'' = -\frac{\pi}{2\ell}\sin\frac{\pi x}{2\ell}$$

$$K = K_{11} = \int_0^\ell EI\phi_1''\phi_1''dx = \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^4 EI_0\int_0^\ell\left(1+\frac{x}{\ell}\right)^3\sin^2\frac{\pi x}{2\ell}dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^4\frac{EI_0\ell}{2}\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{\xi+1}{2}\right)^3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\xi+1}{2}\right)d\xi$$

$$K_G = K_{G11} = \int_0^\ell \phi_1'\phi_1'dx = \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2\int_0^\ell\cos^2\frac{\pi x}{2\ell}dx = \left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2\frac{\ell}{2}$$

Ved Gauss-Lagrange integrasjon finner vi K_{11} og deretter

$$P_{kr} = \frac{K_{11}}{K_{G11}}$$

i	ξ_i	$(\xi_i+1)/2$	$f(\xi_i)$	W_i	$W_i f(\xi_i)$
1	-0.86113	0.069435	0.014492	0.34785	0.005041
2	-0.33998	0.33001	0.577569	0.65214	0.376656
3	0.33998	0.66999	3.514026	0.65214	2.291637
4	0.86113	0.930565	7.110116	0.34785	2.473254

Sum	5.146588	
K_{11}	15.67	EI_0/ℓ^3
K_{G11}	1.234	$/\ell$
P_{cr}	12.70	EI_0/ℓ^2