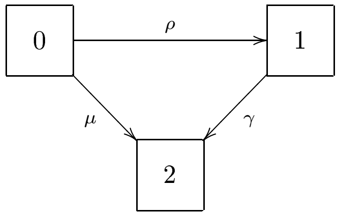
1 Markovkjeder

Vi betrakter tretilstandsmodellen i Figur 1 der overgangsintesitetene μ, ρ og γ alle generelt er tidsavhengige. Et typisk eksempel er at tilstand 0 er 'aktiv', 1 er 'ufør' og 2 er 'død'. Anta vi betrakter x-åringer og deres overganssannsynligheter. Etter tid s vil intensitetene ha verdier μ_{x+s}, ρ_{x+s} og γ_{x+s}. Vi forenkler notasjonen ved å la $\mu(s) := \mu_{x+s}$ og tilsvarende for de andre intensitetene.



Figur 1: Tretilstandsmodell

Kolmogorov forlengs er

$$p_{01}(t+dt) = p_{01}(t) \cdot (1-\gamma(t)dt) + p_{00}(t) \cdot \rho(t)dt,$$

som gir

$$p'_{01}(t) + \gamma(t) \cdot p_{01}(t) = \rho(t) \cdot p_{00}(t). \tag{1}$$

Vi løser (1) ved å gange over alt med en *integrerende faktor*

$$\exp(\int_0^t \gamma(s)\,ds).$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(p_{01}(t)\cdot \exp(\int_0^t \gamma(s)\,ds)\right) &= \rho(t)\cdot p_{00}(t)\cdot \exp(\int_0^t \gamma(s)\,ds) \\ &= \exp(-\int_0^t (\mu(s)+\rho(s))\,ds)\cdot \rho(t)\cdot \exp(\int_0^t \gamma(s)\,ds) \\ &= \exp(\int_0^t (\gamma(s)-\mu(s)-\rho(s))\,ds)\cdot \rho(t). \qquad (2)\end{aligned}$$

Legg merke til at uttrykket i (2) ikke avhenger av $p_{01}(t)$. Derfor kan vi løse (1) ved å integrere opp uttrykkene ovenfor. Men løsningen vil bli svært grisete unntatt om vi kan finne et enkelt uttrykk for integralet av lasset i (2). Dette ser ikke enkelt ut, men reduserer i et spesielt tilfelle til enkel regning:

Anta $\mu(s) = \gamma(s)$ og la $\mu(s)$ betegne den felles verdi. Da blir (2)

$$\exp(-\int_0^t \rho(s)\,ds)\cdot \rho(t), \tag{3}$$

og vi gjenkjenner (3) som

$$-\frac{d}{dt}\,\exp(-\int_0^t \rho(s)\,ds).$$

Kombinerer vi alt ovenfor får vi i det spesielle tilfellet at

$$p_{01}(t)\cdot\exp(\int_0^t \mu(s)\,ds) = 1 - \exp(-\int_0^t \rho(s)\,ds),$$

og derfor til slutt

$$p_{01}(t) = \exp(-\int_0^t \mu(s)\,ds)\cdot(1-\exp(-\int_0^t \rho(s)\,ds)).$$