UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK 2510 — Skadeforsikring og risiko.
Eksamensdag:	Torsdag 3. juni 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

I disse oppgavene følger alle skadefrekvenser Poisson-fordelingen. Du vil få brukt for betegnelsene

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2), \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy.$$

og at $\Phi(2.33) \approx 0.99$.

Oppgave 1.

En skadeforsikringsportfølje består av 100000 identiske poliser. Årlig skadefrekvens per polise er 5% og gjennomsnittskaden er 0.1 millioner NOK. Standardavviket er også 0.1 million NOK.

a) Hva er forventing og varians for porteføljens samlete utbetaling i løpet av ett år?

b) Dersom du legger normalfordelingsantakelsen til grunn: Hva blir porteføljens avsetning ved nivå 1% ?

Anta at forsikringsselskapet har tegnet en stopp-loss kontrakt der alt over 500 millioner NOK dekkes av reassuranse. Stopp loss med nedre grense a betyr at om den samlete utbetaling fra cedent til sine forsikringstakere er $\mathcal{X}$, yter reassurandør

$$\mathcal{X}^{\text{re}} = \begin{array}{ll} 0 & \text{hvis } \mathcal{X} < a \\ \mathcal{X} - a & \text{hvis } \mathcal{X} \geq a. \end{array}$$

(Fortsettes side 2.)

Forutsett at $\mathcal{X}$ er tilnærmet normalfordelt med forventing ξ og standardavvik σ.

c) Vis at den rene premie ved reassuransen tilnærmet blir

$$\sigma\varphi(v) + (\xi - a)\{1 - \Phi(v)\}, \qquad v = (a - \xi)/\sigma.$$

d) Hva blir den rene premien dersom reassurandør oppnår et premiepåslag på 10%? Hva er det beløp cedentens fortjeneste gjennomsnittlig blir redusert med?

e) Med hvor mye går cedentens 1% solvenskrav ned gjennom reassuransen?

Oppgave 2.

Anta at skade*intensiteten* i motorovognforsikring avhenger av geografisk område (i) og alder (a). Det er da forutsatt at kjørelengde er konstant. Legg til grunn en multiplikativ modell det skadeintensitet μ_{ia} (per år) for område i og bilførers alder a er av formen

$$\mu_{ia} = \exp(\alpha_i + \beta_a),$$

der α_i og β_a er parametre. Modellen er bestemt dersom (for eksempel) $\alpha_1 = 0$ for det første av områdene.

a) Finn matematisk uttrykk for årlig, *differentiert* premie for alle gruppene dersom gjennomsnittskaden er ξ og premiepåslaget γ.

Anta at en kunde forlater selskapet etter 3 måneder. Hun (eller han) har betalt premie for hele året på forhånd. Selskapet fører den politikk at det tilbakebetaler for den merrisiko kunden har betalt inn.

b) Foreslå (med kort begrunnelse) en rimelig tilbakebetaling i de ulike gruppene.

Ved estimeringen fra historiske data vil vi ha tilgang til antall skader N_{iaj} fra polise j i gruppe (i, a). Anta at kunden har vært i selskapet i tiden T_{iaj}. La

$$N_{ia} = \sum_j N_{iaj}, \qquad T_{ia} = \sum_j T_{iaj}$$

Parameterestimeringen foretas enklest ved hjelp av størrelsene N_{ia}. Legg til grunn den vanlige antakelsen om Poisson-fordeling.

c) Forklar hvorfor N_{ia} er Poissonfordelt. Hva blir parameteren?

d) Skriv opp et matematisk uttrykk som ved å maksimeres bestemmer parametrene μ_{ia}.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

Vi skal i denne oppgaven konstruere et simuleringsprogram for en reassurandør som regner med at skadenes størrelse følger en Weibull-modell. Dette betyr at skaden Z anmeldt cedenten er lik

$$Z = \beta Y^c,$$

der Y er eksponentielt fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(y) = \exp(-y), \qquad y > 0.$$

Parametrene β og c er positive. Dette er en mulig modell over et vidt spektrum av anvendelser.

La U være uniformt fordelt (alle verdier mellom 0 og 1 like sannsynlige).

a) Vis at da følger $Y = -\log(U)$ den eksponentielle fordelingen ovenfor. Hvordan vil du ut fra dette simulere fra Weibull-fordelingen?

b) Vis at

$$\Pr(a < Z < b) = \exp\{-(a/\beta)^{1/c}\} - \exp\{-(b/\beta)^{1/c}\}.$$

Anta at reassuransekontrakten kommer til anvendelse om $Z > a$ og la $Z_a = Z - a$.

c) Anta at gitt at $Z > a$. Vis at da kan Z_a representeres som

$$Z_a = \beta\{Y' + \left(\frac{a}{\beta}\right)^{1/c}\}^c - a$$

der Y' følger samme fordeling som Y. [Hint: Du kan, uten bevis, bruke at den betingete fordelingen for $Y - v$ gitt at $Y > v$ er fordelingen til Y selv.]

Anta at reassurandørs porteføljе består av J identiske poliser med samme gjennomsnittlige årlige skadefrekvens λ. Kravene mot cedent følger alle Weibull-fordelingen. De skader som berører ressurandør er de som overskyter nivået a. Reassurandør dekker da $Z - a$, maksimalt $b - a$.

d) Gjør rede for at de skadene som berører reassurandør har en gjennomsnittlig frekvens λ_a. Skriv opp et uttrykk for λ_a.

e) Lag et program som simulerer reassurandørs risiko.

SLUTT