UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2510 — Skadeforsikring og risiko.
Eksamensdag:	Torsdag 15. juni 2006.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $\mathcal{N}$ være antall skader mot en portefølje og Z kravet per hendelse. Forutsett at $\mathcal{N} \sim \text{Poisson}(J\mu T)$ og at Z er paretofordelt med parametre α og β. Det oppgis at

$$E(Z) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \qquad \text{og at} \qquad \text{sd}(Z) = E(Z)\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}},$$

der det forutsettes at $\alpha > 2$. Sannsynlighetstettheten er $f(z) = (\alpha/\beta)(1 + z/\beta)^{-(\alpha+1)}$ for $z > 0$, og du vil trenge at

$$\int_a^{a+b} (z-a) f(z)\, dz + b \int_{a+b}^{\infty} f(z)\, dz = \frac{\beta}{\alpha - 1}\{1+a/\beta)^{-(\alpha-1)} - (1+(a+b)/\beta)^{-(\alpha-1)}\}.$$

Dette behøver du ikke verifisere. Forøvrig er J antall poliser, μ skadeintensiteten og T den tiden porteføljen er eksponert.

a) Hva blir polisenes rene premie?

(Fortsettes side 2.)

Anta at portføljen reforsikres gjennom en vanlig $a \times b$ kontrakt per hendelse.

b) Hva blir ren premie ved reforsikringen?

c) Hva blir premien ved reforsikringen når påslaget er γ? Hva er det gjennomsnitlige tap ved å tegne en slik reforsikring?

d) Hvordan påvirkes parametrene i fordelingen av inflasjon? Vis at premien nå må øke [Hint: Det er kanskje lettest teknisk å vise dette når $b = \infty$. Det holder å gjennomføre resonnementet da.]

Oppgave 2.

La $\mathcal{X} = Z_1 + \cdots + Z_{\mathcal{N}}$ være samlete utbetalinger fra en portefølje der antall krav $\mathcal{N} \sim \text{Poisson}(J\mu T)$ som i foregående oppgave og der $Z_1, Z_2, \ldots$ er uavhengige og identisk fordelte utbetalinger. Modellen for de siste er på formen $Z_i = \theta Y_i$ der $E(Y_i) = 1$ og $\text{sd}(Y_i) = \tau$.

a) Vis ved enkle utledninger at

$$E(\mathcal{X}) = J\mu T\theta \qquad \text{og at} \qquad \text{var}(\mathcal{X}) = J\mu T\theta^2(1+\tau^2)$$

Ofte er det aktuelt å anse μ som en stokastisk variable (som trekkes tilfeldig for hver periode), men i denne oppgaven skal vi la θ spille en slik rolle. Anta derfor at $\theta = \xi V$ der $E(V) = 1$ og $\text{sd}(V) = \sigma$. Utrykkene i a) skal da oppfattes som betinget forventning og varians gitt θ.

b) Beregn alternative uttrykk for $E(\mathcal{X})$ og $\text{var}(\mathcal{X})$ når usikkerheten i θ i den nye modellen er inkludert.

c) Beregn relativ usikkerhet ved portføljens utbetalinger, dvs. $\text{sd}(\mathcal{X})/E(\mathcal{X})$ og bestem hva som skjer ved dette uttrykket når $J \to \infty$. Under hvilken betingelse oppnås full diversifisering, dvs at usikkerheten for store porteføljer blir borte?

Ovenfor ble θ trukket som en felles verdi for hele portføljen. Anta i steden at θ isteden trekkes **for hver polise** uavhengig av hverandre.

d) Forklar hvordan du nå kan beregne $E(\mathcal{X})$ og $\text{var}(\mathcal{X})$ ved å sette $J = 1$ inn i uttrykkene du fant i b) og summere over polisene. Hva blir resultatene nå?

e) Argumenter for at uavhengig risikovariasjon mellom polisene gir mye mindre risikoøkning for porteføljen enn den felles typen vi regnet på ovenfor.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3.

I denne oppgaven skal vi anvende den samme modellen som i Oppgave 1, bortsett fra at ansvaret per hendelse er begrenset til b. Dette betyr at om Pareto-variablen Z overstiger b blir bare b dekket. Erstatningen er altså $H = \min(Z, b)$.

a) Bruk inversjonsmetoden til å utlede en metode som konverterer en uniform U^* til en trekning H^* fra denne fordelingen.

Vi skal studere cedentens netto risiko ved en reforsikringsordning som gjelder per hendelse. Denne er av $a \times b$-typen (som i Oppgave 1) der b faller sammen med øvre grense for cedentens risiko overfor kundene. Anta at du har gitt en algoritme som genererer Poisson-fordelte variable.

b) Bruk denne sammen med metoden i a) til å lage et program som simulerer cedentens risiko.

c) Modifiser programmet slik at du også bestemmer reforsikrerens risiko.

d) Forklar hvordan programmet kan sjekkes ved å sammenholde m simuleringer av reforsikrerens utbetalinger med det matematiske utrykket i Oppgave 1b).

I det etterfølgende er beregnet ren reforsikringspremie og 99%-avsetningen for denne ved hjelp av en million simuleringer når

$$J\mu T = 10, \;\; \alpha = 3, \;\; \beta = 2 \;\text{ og }\; b = 10.$$

Dette ga følgende tabell over ren reforsikringspremie og cedentens 99% reserve under variasjon av nedre innslagsgrense a for reforsikringen:

	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$	$a=20$
Reforsikringspremie	4.18	2.33	1.33	0.84	0.54	0
99% reserve	11.1	16.0	18.8	20.7	22.0	25.6

e) Skriv en kort, **populær** redgjørelse (max 20 linjer) for hvor mye kapital cedent sparer på å tegne reforsikring og hvor mye det gjennomsnittlig taper når premiepåslaget ved reforsikringen er 30%. Kan du trekke inn betydningen av rente (anta at den for tiden er er 5% årlig) er det glimrende. Populær betyr at fremstillingen kan leses av økonomer!

SLUTT